

**Министерство образования и науки Российской Федерации
Саратовский государственный технический университет
имени Гагарина Ю.А.
Энгельсский технологический институт**

РЕШЕНИЕ МАТРИЧНЫХ ИГР МЕТОДОМ БРАУНА-РОБИНСОН

Методические указания для студентов направлений
38.03.02 (080200.62) «Менеджмент»,
38.03.05 (080500.62) «Бизнес-информатика»
02.03.03 «Математическое обеспечение и администрирование
информационных систем»

Энгельс 2014 г.

УДК 519.8
ББК 22.1
С32

С32 Серебряков А.В., Нагар Ю.Н.: Решение матричных игр методом Брауна-Робинсон: Методические указания и задания для самостоятельной работы – Энгельс: Изд-во ЭТИ (филиал) СГТУ имени Гагарина Ю.А., 2014. – 16 с.

Рецензенты: зав. кафедрой «Техническая физика и информационные технологии» ЭТИ (филиал) СГТУ имени Гагарина Ю.А., к.ф.-м.н., доц. Терин Д.В.;
доцент кафедры «Высшая математика и механика» ЭТИ (филиал) СГТУ имени Гагарина Ю.А., к.ф.-м.н., доц. Новиков В.В.

Методические указания предназначены для организации практических занятий и самостоятельной работы студентов, изучающих дисциплины «Исследование операций», «Математические методы и модели в управлении».

УДК 519.8
ББК 22.1

Одобрено редакционно-издательским советом ЭТИ (филиал) СГТУ

Брошюра издается в авторской редакции

ВВЕДЕНИЕ

Настоящие методические указания предназначены помочь студентам в изучении теории матричных игр как одного из направлений исследования операций.

Для рассмотрения предлагается приближенный метод решения матричной игры. В литературе этот метод известен как метод фиктивного разыгрывания или метод Брауна-Робинсон. Заметим, что в русскоязычной учебной литературе часто упоминают «метод Брауна-Робинсона». Последнее является недоразумением, так как одним из создателей метода является Джулия Робинсон (Julia Robinson).

Методические указания содержат начальные понятия о матричных играх, изложение основных положений метода Брауна-Робинсон и разбор примера решения матричных игр этим методом. В приложении 1 приведены варианты заданий для организации практических занятий в учебной группе и самостоятельной работы студентов. В приложении 2 содержится программа, реализующая метод Брауна-Робинсон в среде программирования MATLAB.

1. НАЧАЛЬНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ИГР

Теория игр – направление в исследовании операций, рассматривающее математические модели конфликтов. Термин *конфликт* используется для обозначения ситуации, характеризующейся следующими признаками:

- участие нескольких сторон;
- наличие у каждого участника собственных интересов, полностью или частично противоположных интересам других сторон конфликта;
- возможность каждого участника действовать в своих интересах с учетом существующих ограничений;
- отсутствие достоверной информации о намерениях других участников конфликта вплоть до момента реализации этих намерений.

Если сохранить только наиболее существенные факторы, которые влияют на поведение участников конфликта, то мы получим упрощенную модель конфликтной ситуации. Такую модель принято называть *игрой*. Соответственно, стороны конфликта называются *игроками*. Особенности игровой модели являются:

- наличие определенных *правил игры*, накладывающих ограничения на допустимые действия игроков;
- возможность для каждого игрока количественно оценить результат совокупных действий игроков, то есть определить *выигрыш игрока (платеж)*.

Если в процессе игры игрок принимает и реализует некоторое решение, говорят, что сделан *ход*. Будем считать, что исход игры зависит только от ходов игроков. Различают *личные ходы*, выбранные сознательно, и *случайные ходы*, выбранные случайным образом.

Далее рассматриваются так называемые *парные матричные игры с нулевой суммой*, что подразумевает выполнение следующих условий:

- 1) в конфликтной ситуации участвуют два игрока;
- 2) интересы игроков полностью противоположны;
- 3) сумма выигрышей игроков равна нулю, то есть выигрыш одного игрока равен проигрышу второго;
- 4) каждый игрок для достижения своих целей располагает конечным набором допустимых действий (*чистых стратегий*).

Эти условия позволяют представить правила игры в форме матрицы. Действительно, пусть известны чистые стратегии $A_1, \dots, A_m$ первого игрока (игрока A), чистые стратегии $B_1, \dots, B_n$ второго игрока (игрока B) и правило для подсчета выигрыша a_{ij} первого игрока в ситуации (A_i, B_j) . Так как рассматривается игра с нулевой суммой, то это правило однозначно определяет также проигрыши второго игрока. Сформируем матрицу выигрышей первого игрока

	B_1	B_2	...	B_n
A_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}
...	...	...	...	...
A_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}

Такую матрицу принято называть *платежной матрицей игры*.

Для оценки результатов игры общепринятым является следующий подход: *оптимальная стратегия* – это стратегия, которая при многократном повторении игры обеспечивает игроку максимально возможный средний выигрыш (минимально возможный средний проигрыш). При этом игрок должен полагать, что другой участник конфликта действует наиболее эффективно.

В теории игр важнейшим является понятие *равновесия*, то есть такого набора стратегий, что ни один игрок, предполагая стратегии остальных игроков зафиксированными, не может поменять стратегию так, чтобы увеличить свой платеж.

В некоторых случаях платежная матрица допускает сокращения. Пусть для строк матрицы, которые соответствуют каким-нибудь стратегиям A_k и A_l первого игрока, выполняются условия

$$a_{kj} \geq a_{lj} \quad (j=1, \dots, n). \quad (1)$$

Тогда говорят, что стратегия A_k *мажорирует* стратегию A_l , другими словами – стратегия A_l *доминируется* стратегией A_k . Стратегия A_l в дальнейшем не рассматривается, так как является заведомо невыгодной

для первого игрока и не будет им выбрана. Если же для столбцов матрицы, которые соответствуют каким-нибудь стратегиям B_k и B_l второго игрока, выполняются условия

$$a_{ik} \leq a_{il} \quad (i=1, \dots, m), \quad (2)$$

то стратегия B_l *мажорирует* стратегию B_k , другими словами – стратегия B_l *доминирует* стратегию B_k . Так как второй игрок заинтересован в выборе столбцов с меньшими элементами a_{ij} , то стратегия B_l исключается из дальнейшего рассмотрения.

В игре, которая задана платежной матрицей с выигрышами a_{ij} игрока A , этот игрок должен оценивать свои чистые стратегии $A_1, \dots, A_m$ в соответствии с *правилом максимина*. Данное правило приводит к оценке в виде *нижней цены игры*

$$\alpha = \max_i (\min_j a_{ij}) \quad (3)$$

Для обоснования правила (3) полагаем, что при личном ходе первого игрока с помощью чистой стратегии A_i второй игрок отвечает выбором стратегии B_j так, что выигрыш первого игрока становится минимально возможным, равным

$$\alpha_i = \min_j a_{ij} \quad (i=1, \dots, m) \quad (4)$$

Задачей игрока A становится выбор чистой стратегии, приводящей к платежу

$$\alpha = \max_i \alpha_i. \quad (5)$$

Комбинируем далее условия (4),(5) и получаем требуемое обоснование правила (3). Стратегия A_i , для которой выполняется условие (3) называется *максиминной стратегией*.

В той же игре игрок B должен оценивать свои чистые стратегии $B_1, \dots, B_n$ в соответствии с *правилом минимакса*. Теперь учитывается, что при личных ходах (A_i, B_j) игрок A с помощью чистой стратегии A_i может доставить игроку B максимальный возможный проигрыш

$$\beta_j = \max_i a_{ij} \quad (j=1, \dots, n). \quad (6)$$

Игрок B должен своими действиями минимизировать ущерб, что выражается выбором

$$\beta = \min_j \beta_j. \quad (7)$$

Условия (6),(7) приводят к выбору *минимаксной стратегии* B_j и оценке в виде *верхней цены игры*

$$\beta = \min_j (\max_i a_{ij}). \quad (8)$$

В теории игр известен следующий результат [1]: нижняя цена игры всегда не превосходит верхнюю цену игры

$$\alpha \leq \beta. \quad (9)$$

Если условие (9) выполняется в форме равенства $\alpha=\beta$, то данная игра имеет так называемую *седловую точку*. В этом случае оптимальная

стратегия игрока строится на личных ходах как чистая стратегия. Решение такой задачи при любых размерах платежной матрицы можно получить без использования приближенных итерационных методов.

Более интересной представляется матричная игра без седловых точек. Для такой игры условие (9) выполняется в форме строгого равенства $\alpha < \beta$. В игре без седловой точки состояние равновесия может достигаться только при использовании игроками смешанных стратегий. *Смешанная стратегия* – это вектор, каждая из компонент которого показывает относительную частоту использования игроком соответствующей чистой стратегии. В дальнейшем будем обозначать смешанную стратегию первого игрока как

$$\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_m), \quad p_i \geq 0 \quad (i = 1, \dots, m). \quad (10)$$

Смешанную стратегию второго игрока будем обозначать как

$$\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n), \quad q_j \geq 0 \quad (j = 1, \dots, n). \quad (11)$$

Для компонентов векторов $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ в (10), (11) должны выполняться условия

$$\sum_{i=1}^m p_i = 1, \quad \sum_{j=1}^n q_j = 1. \quad (12)$$

Решением игры будем называть пару оптимальных стратегий $\mathbf{p}^*$ и $\mathbf{q}^*$, при которых достигается положение равновесия с ценой игры

$$v = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} p_i^* q_j^*. \quad (13)$$

Заметим, что с точки зрения теории вероятностей выражение (13) определяет цену игры как математическое ожидание дискретной случайной величины – выигрыша игрока A , а величина

$$\omega_{ij} = p_i^* q_j^* \quad (i = 1, \dots, m; \quad j = 1, \dots, n)$$

определяет вероятность получения первым игроком выигрыша, равного a_{ij} . При этом оптимальные смешанные стратегии игроков строятся на основе случайных ходов. В 1928 г. Джон фон Нейман доказал теорему, в которой утверждается, что каждая конечная игра с нулевой суммой имеет решение в смешанных стратегиях.

Сложность решения игры без седловых точек существенно зависит от размеров платежной матрицы. Достаточно просто решаются игры в частном случае, когда платежная матрица имеет размер $m \times 2$ или $2 \times n$. Решение таких игр в смешанных стратегиях допускает наглядную иллюстрацию и графический метод решения. Обоснование графического метода и примеры решения приведены в учебной литературе [1,2]. Для общего случая, когда платежная матрица имеет произвольные конечные размеры, актуальным становится приближенное решение за счет последовательных приближений.

2. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ МЕТОДА БРАУНА-РОБИНСОН

В методе Брауна-Робинсон рассматривается последовательность фиктивных разыгрываний с заданной платежной матрицей. Будем называть каждое такое разыгрывание *партией*. В первой партии игроки произвольно выбирают свои чистые стратегии. В последующих партиях каждый из игроков предполагает, что противник использует смешанную стратегию, которая определяется относительными частотами появления чистых стратегий на предыдущих шагах. На основе такого предположения игрок делает свой личный ход, выбирая чистую стратегию. Такой подход прост в реализации и моделирует накопление игроками опыта при повторении игровой ситуации.

Пусть парная матричная игра с нулевой суммой задана платежной матрицей

	B_1	B_2	...	B_n
A_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}
...	...	...	...	...
A_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}

Представим, что разыграны первые k партий. При этом первый игрок использовал свои чистые стратегии с относительными частотами, которые представлены в табл.1.

Таблица 1.

A_1	A_2	...	A_m
p_{1k}	p_{2k}	...	p_{mk}

Второй игрок использовал свои чистые стратегии с относительными частотами, которые представлены в табл.2.

Таблица 2.

B_1	B_2	...	B_n
q_{1k}	q_{2k}	...	q_{nk}

Для относительных частот в табл.1,2 выполняются условия

$$\sum_{i=1}^m p_{ik} = 1, \quad \sum_{j=1}^n q_{jk} = 1.$$

Эти условия соответствуют требованиям (12) для компонент смешанных стратегий.

Далее получим оценки

$$v_1(k) = \min_j \sum_{i=1}^m a_{ij} p_{ik} = \sum_{i=1}^m a_{i\beta} p_{ik}, \quad v_2(k) = \max_i \sum_{j=1}^n a_{ij} q_{jk} = \sum_{j=1}^n a_{\alpha j} q_{jk}. \quad (14)$$

Тогда в партии с номером $k+1$ на основании оценок (14) первый игрок выбирает стратегию A_α , второй игрок – стратегию B_β .

Относительные частоты, которые приведены в табл.1,2, определяют смешанные стратегии игроков в первых k партиях. В силу этого выполняется неравенство

$$v_1(k) \leq v \leq v_2(k), \quad (15)$$

где v – точное значение цены игры [1]. Условие (15) приводит к оценке цены игры вида

$$\max_k v_1(k) \leq v \leq \min_k v_2(k). \quad (16)$$

В 1951 г. Дж.Робинсон доказала, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} v_1(k) = \lim_{k \rightarrow \infty} v_2(k) = v,$$

то есть итерации сходятся к точному значению цены игры. Это позволяет прекратить фиктивные разыгрывания, когда величина

$$\Delta = \min_k v_2(k) - \max_k v_1(k) \quad (17)$$

становится меньше, чем заданная точность вычисления цены игры.

В литературе традиционно отмечается малая скорость сходимости, а также немонотонность последовательностей $v_1(k)$ и $v_2(k)$. Также имеет место замедление сходимости итераций при увеличении размеров платежной матрицы. Однако реализация метода на современных компьютерах делает указанные недостатки метода Брауна-Робинсон не такими значительными. В то же время простота и наглядность процедуры фиктивного разыгрывания делают метод привлекательным, в том числе для учебных целей.

Пример. Решить матричную игру с нулевой суммой, если платежная матрица имеет вид

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	3	7	1	-2	2
A_2	2	-5	-4	0	2
A_3	1	6	-3	-5	-1

Будем считать, что в первой партии игрок А воспользуется стратегией A_1 , которая является максиминной для данной матричной игры. В этом случае игрок В может получить следующие проигрышы: 3 при своей чистой стратегии B_1 , 7 – при B_2 , 1 – при B_3 , -2 – при B_4 , 2 – при B_5 . Тогда в первой партии игрок В, предполагая, что игрок А выберет стратегию A_1 , с целью минимизации своего проигрыша применит стратегию B_4 .

Приближенное значение цены игры будем находить по формуле

$$v^* = (\max_k v_2(k) + \min_k v_1(k)) / 2. \quad (18)$$

По итогам первой партии определяем относительные частоты, с которыми игроки использовали свои стратегии,

$$p_{11} = 1, \quad p_{21} = 0, \quad p_{31} = 0, \\ q_{11} = 0, \quad q_{21} = 0, \quad q_{31} = 0, \quad q_{41} = 1, \quad q_{51} = 0.$$

Применив формулы (14), находим при $\alpha = 2, \beta = 3$ оценки $v_1(1) = -2, v_2(1) = 0$. Приближенная цена игры после первого разыгрывания $v^* = -1$.

В соответствии с найденными значениями параметров α и β во второй партии игрок А воспользуется стратегией A_2 , а игрок В – стратегией B_3 . Относительные частоты применения стратегий после двух партий составят

$$p_{12} = 0,5, \quad p_{22} = 0,5, \quad p_{32} = 0, \\ q_{12} = 0, \quad q_{22} = 0, \quad q_{32} = 0,5, \quad q_{42} = 0,5, \quad q_{52} = 0.$$

Подсчитываем по формуле (14) оценки $v_1(2) = -1,5, v_2(2) = -0,5$. Эти оценки были получены при $\alpha = 1, \beta = 4$. По результатам двух партий приближенная цена игры равна

$$v^* = (\max\{-2; -1,5\} + \min\{0; -0,5\}) / 2 = -1.$$

Переходим к третьей партии. В ней игрок А выберет стратегию A_1 , игрок В – стратегию B_4 . Пересчитаем относительные частоты применения чистых стратегий:

$$p_{13} = 0,667, \quad p_{23} = 0,333, \quad p_{33} = 0, \\ q_{13} = 0, \quad q_{23} = 0, \quad q_{33} = 0,333, \quad q_{43} = 0,667, \quad q_{53} = 0.$$

Снова определяем оценки $v_1(3) = -1,333, v_2(3) = -1$, при этом $\alpha = 1, \beta = 4$. Находим приближенную цену игры

$$v^* = (\max\{-2; -1,5; -1,333\} + \min\{0; -0,5; -1\}) / 2 = -1,167.$$

Фиктивные разыгрывания продолжаем до тех пор, пока величина Δ в формуле (17) превышает точность вычисления цены игры. В нашем примере для вычисления цены игры положим точность 0,01.

Результаты вычислений, полученных на каждой итерации при фиктивном разыгрывании, представлены в табл. 3.

Таблица 3.

Номер партии k	Игрок А				Игрок В						$v_1(k)$	$v_2(k)$	v^*
	A_α	относительные частоты применения чистых стратегий			B_β	относительные частоты применения чистых стратегий							
		p_{1k}	p_{2k}	p_{3k}		q_{1k}	q_{2k}	q_{3k}	q_{4k}	q_{5k}			
1	A_1	1	0	0	B_4	0	0	0	1	0	-2	0	-1
2	A_2	0,5	0,5	0	B_3	0	0	0,5	0,5	0	-1,5	-0,5	-1
3	A_1	0,667	0,333	0	B_4	0	0	0,333	0,667	0	-1,333	-1	-1,167
4	A_1	0,75	0,25	0	B_4	0	0	0,25	0,75	0	-1,5	-1	-1,167
5	A_2	0,6	0,4	0	B_4	0	0	0,2	0,8	0	-1,2	-0,8	-1,1
6	A_2	0,5	0,5	0	B_3	0	0	0,333	0,667	0	-1,5	-1	-1,1
7	A_1	0,571	0,428	0	B_3	0	0	0,429	0,571	0	-1,143	-0,714	-1,071
8	A_1	0,625	0,375	0	B_4	0	0	0,375	0,625	0	-1,25	-0,875	-1,071
9	A_1	0,667	0,333	0	B_4	0	0	0,333	0,667	0	-1,333	-1	-1,071
10	A_1	0,7	0,3	0	B_4	0	0	0,3	0,7	0	-1,4	-1,1	-1,121
11	A_1	0,727	0,273	0	B_4	0	0	0,273	0,727	0	-1,455	-1,091	-1,121
12	A_2	0,667	0,333	0	B_4	0	0	0,25	0,75	0	-1,333	-1	-1,121
13	A_2	0,615	0,385	0	B_4	0	0	0,231	0,769	0	-1,231	-0,923	-1,121
14	A_2	0,571	0,429	0	B_3	0	0	0,286	0,714	0	-1,143	-1,143	-1,143

Итерационный процесс завершился после 14 партий. Приближенное значение цены игры будет равно $v^* = -1,143$. Сходимость итерационного процесса проиллюстрирована на рис.1.

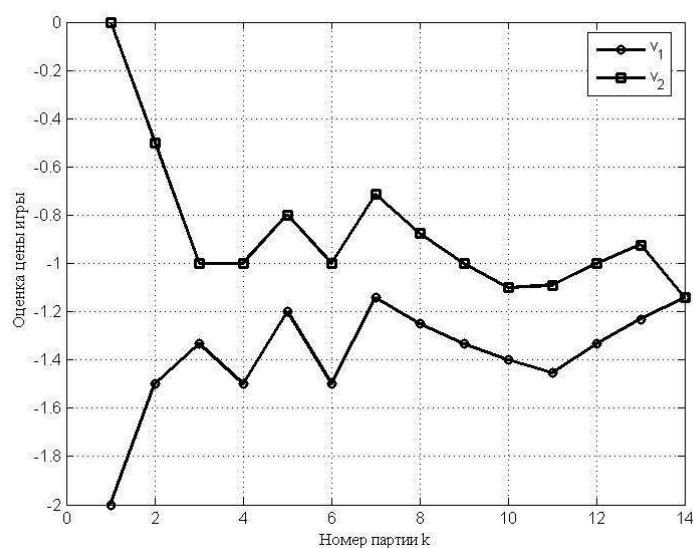


Рис.1. Сходимость итерационного процесса фиктивных разыгрываний.

Оценка итерационного процесса фиктивного разыгрывания может быть реализована иным образом – через подсчет накопленных выигрышей игрока А и накопленных проигрышей игрока В. При выборе стратегии в новой партии каждый из игроков предполагает, что соперник руководствуется опытом, полученным в прошедших партиях. Этот опыт выражается для игрока А в суммарных выигрышах, для игрока В – в суммарных проигрышах. В качестве оценок используются величины

$$v_1(k) = \frac{1}{k} \min_j a_j(k) \quad v_2(k) = \frac{1}{k} \max_i b_i(k). \quad (19)$$

Здесь:

$a_j(k)$ – выигрыш, накопленный за k партий игроком А при применении игроком В чистой стратегии B_j ;

$b_i(k)$ – проигрыш, накопленный за k партий игроком В при применении игроком А чистой стратегии A_i .

Разберем решение данной матричной игры в терминах накопленных выигрышей и проигрышей. По-прежнему полагаем, что в первой партии игрок А воспользуется максиминной стратегией A_1 . При этом игрок А может получить выигрыши 3, 7, 1, -2, 2 при ответе игрока В стратегиями B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 соответственно. С целью минимизации проигрыша игрок В применит в первой партии стратегию B_4 . В этом случае его проигрыш составит -2, 0, -5 в зависимости от использования первым игроком одной из стратегий A_1, A_2, A_3 .

Наименьший из выигрышей игрока А по результатам первой партии равен -2, наибольший из проигрышей игрока В равен 0. Определяем по формулам (19) оценки $v_1(1) = -2$, $v_2(1) = 0$.

Во второй партии игрок А с расчетом, что игрок В продолжит пользоваться стратегией B_4 , применит для наибольшего выигрыша стратегию A_2 . При этом накопленные за две партии выигрыши игрока А при различных чистых стратегиях игрока В могут составить 2, -3, -2 или 4. Следовательно, выбор игрока В падет на стратегию B_3 , которая даст ему наименьший проигрыш. Суммируем проигрыши игрока В за две партии при различных чистых стратегиях игрока А. Получим -1, -4 и -8 соответственно.

После разыгрывания двух партий наименьший накопленный выигрыш игрока А равен -3, а наибольший накопленный проигрыш игрока В равен -1. Разделив их на число партий $k = 2$, получаем оценки: $v_1(2) = -1,5$, $v_2(2) = -0,5$.

В третьей партии, полагая, что игрок В опять будет пользоваться стратегией B_3 , игрок А должен применить стратегию A_1 . Накопленные выигрыши игрока А в этом случае составят 8, 9, -2, -4, 6. Наименьшему из полученных выигрышей, равному -4, соответствует стратегия B_4 . Эта

стратегия является самой выгодной для игрока В в третьей партии. Тогда накопленные проигрыши игрока В составят -3, -4 и -13. Наибольший накопленный проигрыш равен -3. Вычисляем оценки $v_1(3) = -1,333$, $v_2(3) = -1$.

Продолжая разыгрывание, получаем последовательность партий, представленную в табл.4.

Таблица 4.

Номер партии k	Игрок А						Игрок В			$v_1(k)$	$v_2(k)$	v^*	
	A_α	накопленный выигрыш при различных стратегиях игрока В					B_β	накопленный проигрыш при различных стратегиях игрока А					
		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5		A_1	A_2	A_3			
1	A_1	3	7	1	-2	2	B_4	-2	0	5	-2	0	-1
2	A_2	5	2	-3	-2	4	B_3	-1	-4	-8	-1,5	-0,5	-1
3	A_1	8	9	-2	-4	6	B_4	-3	-4	-13	-1,333	-1	-1,167
4	A_1	11	16	-1	-6	8	B_4	-5	-4	-18	-1,5	-1	-1,167
5	A_2	13	11	-5	-6	10	B_4	-7	-4	-23	-1,2	-0,8	-1,1
6	A_2	15	6	-9	-6	12	B_3	-6	-8	-26	-1,5	-1	-1,1
7	A_1	18	13	-8	-8	14	B_3	-5	-12	-29	-1,143	-0,714	-1,071
8	A_1	21	20	-7	-10	16	B_4	-7	-12	-34	-1,25	-0,875	-1,071
9	A_1	24	27	-6	-12	18	B_4	-9	-12	-39	-1,333	-1	-1,071
10	A_1	27	34	-5	-14	20	B_4	-11	-12	-44	-1,4	-1,1	-1,121
11	A_1	30	41	-4	-16	22	B_4	-13	-12	-49	-1,455	-1,091	-1,121
12	A_2	32	36	-8	-16	24	B_4	-15	-12	-54	-1,333	-1	-1,121
13	A_2	34	31	-12	-16	26	B_4	-17	-12	-59	-1,231	-0,923	-1,121
14	A_2	36	26	-16	-16	28	B_3	-16	-16	-62	-1,143	-1,143	-1,143

Сравним столбцы A_α и B_β в табл.3,4, а также столбцы значений $v_1(k)$, $v_2(k)$, v^* в этих таблицах. Убеждаемся, что два способа оценки для цены игры приводят к одной и той же последовательности итераций в методе Брауна-Робинсон.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Петросян Л.А. Теория игр: Учебник / Л.А.Петросян, Н.А.Зенкевич, Е.В.Шевкопляс – СПб: БХВ-Петербург, 2012. – 424 с.
2. Высшая математика. Математическое программирование: Учебник / А.В.Кузнецов, В.А.Сакович, Н.И.Холод; под общ. ред. А.В. Кузнецова – С.Пб.: Лань, 2013. – 351 с.

Приложение 1.

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ

1.-10. Найти приближенное решение для игры с данной платежной матрицей

1.

	B_1	B_2	B_3
A_1	-1	2	0
A_2	3	-3	4
A_3	4	-5	6
A_4	-5	6	-5

2.

	B_1	B_2	B_3
A_1	1	-2	-1
A_2	0	4	6
A_3	-3	5	6
A_4	8	-6	-6

3.

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	-5	3	0	-3
A_2	6	-3	2	0
A_3	-4	4	1	-2

4.

	B_1	B_2	B_3
A_1	1	-5	0
A_2	4	3	-1
A_3	5	4	-2
A_4	-3	-7	3

5.

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	-6	0	3	-8
A_2	2	1	4	-7
A_3	-1	5	-2	6

6.

	B_1	B_2	B_3
A_1	3	1	0
A_2	-5	4	2
A_3	4	2	-3
A_4	5	0	-4

7.

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	5	-4	2	6
A_2	2	-1	3	-5
A_3	3	1	4	0

8.

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	3	-1	5	2
A_2	3	-2	3	1
A_3	2	4	0	7

9.

	B_1	B_2	B_3
A_1	2	4	1
A_2	-4	-3	2
A_3	5	7	-2
A_4	0	3	1

10.

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	0	-1	2	5
A_2	3	6	1	-3
A_3	0	-2	1	4

Приложение 2.

ПРОГРАММА ДЛЯ РЕШЕНИЯ МАТРИЧНОЙ ИГРЫ МЕТОДОМ БРАУНА-РОБИНСОН

%ФАЙЛ-ПРОГРАММА ДЛЯ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ
МАТРИЧНОЙ ИГРЫ

clear all

%задание размерности платежной матрицы

m=input('Укажите число стратегий игрока A m=');

n=input('Укажите число стратегий игрока B n=');

%ввод платежной матрицы

disp('Введите элементы платежной матрицы')

for i=1:m

for j=1:n

a(i,j)=input(strcat('a',num2str(i),num2str(j),'='));

end

end

%точность приближенного решения

delta_v=input('Задайте точность для приближенной цены игры delta_v=');

%инициализация строк для учёта числа использования каждой стратегии

mA(1:m)=0;

mB(1:n)=0;

%определение стратегий игроков в первой партии

r=1;

%определение максиминной стратегии Ak

[maximin,k]=max(min(a,[],2));

mA(k)=mA(k)+1;

disp(['В первой партии игрок A выбрал максиминную стратегию
A',num2str(k)])

```
%формирование строки Asum, содержащей накопленные за r партий
выигрыши первого игрока
Asum=a(k,:);
```

```
%определение ответной стратегии Bs
[min_Asum,s]=min(Asum);
mB(s)=mB(s)+1;
disp(['В ответ игрок B воспользовался стратегией B',num2str(s)])
```

```
%формирование строки Bsum, содержащей накопленные за r партий
проигрыши второго игрока
Bsum=a(:,s)';
[max_Bsum,l]=max(Bsum);
```

```
%определение приближённой цены игры по результатам первой партии
v1(r)=min_Asum/r;
v2(r)=max_Bsum/r;
v(r)=(v1(r)+v2(r))/2;
```

```
%определение приближенных оптимальных смешанных стратегий
p(r,:)=mA/r;
q(r,:)=mB/r;
```

```
%определение приближённой цены игры при дальнейшем разыгрывании
while min(v2)-max(v1)>delta_v
    r=r+1;
    mA(l)=mA(l)+1; Asum=Asum+a(l,:); [min_Asum,t]=min(Asum);
    mB(t)=mB(t)+1; Bsum=Bsum+a(:,t)'; [max_Bsum,l]=max(Bsum);
    v1(r)=min_Asum/r;
    v2(r)=max_Bsum/r;
    v(r)=(max(v1)+min(v2))/2;
    p(r,:)=mA/r;
    q(r,:)=mB/r;
```

```
end
```

```
%вывод результатов
disp(['Итерационный процесс закончен на ',num2str(r),'-ой партии'])
disp(['Приближённая цена игры v=',num2str(v(r))])
disp(['Приближённая оптимальная стратегия первого игрока
p=',' ',num2str(p(end,:)),'\n'])
disp(['Приближённая оптимальная стратегия второго игрока
q=',' ',num2str(q(end,:)),'\n'])
```

Серебряков Андрей Владимирович

Нагар Юлия Николаевна

РЕШЕНИЕ МАТРИЧНЫХ ИГР МЕТОДОМ БРАУНА-РОБИНСОН

Методические указания

Ответственный за выпуск А.В.Серебряков

Оригинал-макет А.В.Серебряков

Подписано в печать _____

Формат 60х84 1/16. Бумага офсетная. Гарнитура Times New Roman Печать RISO.

Объем ____ печ.л. Тираж _____ экз. Заказ № _____.

413100, Россия, Саратовская область, г. Энгельс, пл. Свободы, 17.
ЭТИ (филиал) СГТУ имени Гагарина Ю.А.