Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Саратовский государственный технический университет
имени Гагарина Ю.А.
Энгельсский технологический институт

А.В. Серебряков, В.В. Новиков, Ю.Н. Нагар

ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРНОГО АНАЛИЗА В ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МОДЕЛЯХ СЛУЧАЙНЫХ ГРАФОВ

Учебное пособие

Энгельс 2019 г.

УДК 517.3+519.1
ББК 22.1
С32

Рецензенты:

Кафедра "Информационная безопасность автоматизированных систем"
Саратовского государственного технического университета
имени Гагарина Ю.А,
Доктор физико-математических наук, профессор
В.Ю.Ольшанский

Одобрено
редакционно-издательским советом
ЭТИ (филиал) СГТУ имени Гагарина Ю.А.

Серебряков А.В.
С32 Элементы комбинаторного анализа в задачах теории вероятностей и моделях случайных графов: учебное пособие / А.В. Серебряков, В.В. Новиков, Ю.Н. Нагар. – Энгельс: Изд-во ЭТИ (филиал) СГТУ имени Гагарина Ю.А., 2019. – 52 с.
ISBN 978-5-9907991-9-6

Учебное пособие содержит материал по следующим темам: комбинаторные числа и объекты, метод математической индукции, правило включений и исключений, случайные события и их вероятности, случайный выбор без возвращения и с возвращением. Рассмотрены также некоторые аспекты математических моделей со случайными графами.

Предназначается для студентов технических и классических университетов.

УДК 517.3+519.1
ББК 22.1

ISBN 978-5-9907991-9-6

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение

Комбинаторика (комбинаторный анализ) – это раздел математики, в котором решаются задачи выбора и расположения элементов некоторого, обычно конечного, множества в соответствии с заданными правилами. Каждое такое правило определяет способ построения некоторой конструкции из элементов исходного множества. Такую конструкцию принято называть комбинаторной конфигурацией.

Комбинаторика развивается во взаимодействии с алгеброй, геометрией, теорией вероятностей. Комбинаторные конфигурации находят применение в информатике, статистической физике, биологии и других научных дисциплинах.

Настоящее учебное пособие может быть полезно студентам классических и технических университетов при изучении дисциплин «Математика», «Теория вероятностей, математическая статистика и случайные процессы», а также других курсов, в которых используются комбинаторные и вероятностные методы.

В пособии представлен материал по следующим темам: комбинаторные числа и объекты, метод математической индукции, правило включений и исключений, случайные события и их вероятности, случайный выбор без возвращения и с возвращением. Рассмотрены также некоторые аспекты математических моделей со случайными графами.

В список литературных источников включены известные учебные пособия и сборники задач [1-4,6,8-11], а также некоторые материалы, опубликованные ранее авторами настоящего пособия. [5,7].

1. ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРНОГО АНАЛИЗА

§ 1. Комбинаторные числа и объекты

1.1. Некоторые сведения из теории множеств

Понятие *множество* относится к исходным понятиям математики. Оно обозначает набор, совокупность каких-либо объектов, называемых *элементами множества*. Если элемент a встречается в наборе, представляющем данное множество A, говорят, что элемент принадлежит данному множеству: $a \in A$. Для обозначения *пустого множества*, то есть множества, которому не принадлежит ни одного элемента, используется символ $\varnothing$. Множество, содержащее конечное число элементов, называют *конечным множеством*.

Если каждый элемент, который принадлежит множеству A, принадлежит в то же время множеству B, то множество A называют *подмножеством* множества $B: A \subseteq B$ (A включается в B). Принято, что для любого множества A выполняются включения $A \subseteq A, \quad \varnothing \subseteq A$.

Если выполняются условия $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$, говорят, что A и B – *равные множества*: $A = B$.

Множество U называется *универсальным*, если для любого множества A, которое может быть рассмотрено в данной задаче, выполняется условие $A \subseteq U$. В случае, когда универсальное множество определено, любое множество можно задать с помощью характеристического условия: если для данного элемента условие выполняется, то элемент принадлежит множеству, если не выполняется – не принадлежит.

Пример.1.1. Определить на множестве действительных чисел отрезок $[a,b]$.

В данном примере $U=\mathbb{R}$, $A=[a,b]$. Обозначим через x произвольное действительное число. Тогда $[a,b]=\{x\in \mathbb{R} \mid a\le x\le b\}$. Роль характеристического условия выполняет двойное нестрогое неравенство.

С множествами произвольной природы можно совершать операции объединения и пересечения, определять разность множеств и дополнение множества. Приведем определения для указанных операций.

Объединением множеств A и B (обозначается как $A \cup B$) называется множество всех тех и только тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A, B. Символьная запись данного определения:

$$A \cup B = \{x \in U \mid x \in A \quad или \quad x \in B\}.$$

Пересечением множеств A и B (обозначается как $A \cap B$) называется множество всех тех и только тех элементов, которые принадлежат и A и B, то есть

$$A \cap B = \{x \in U \mid x \in A \quad и \quad x \in B\}.$$

Разностью множеств A и B (обозначается как $A \setminus B$) называется множество всех тех и только тех элементов множества A, которые не принадлежат B, то есть

$$A \setminus B = \{x \in U \mid x \in A \quad и \quad x \notin B\}.$$

Дополнением множества A (обозначается как $\overline{A}$, или $\neg A$) называется множество всех тех и только тех элементов, которые не принадлежат A, то есть

$$\neg A = \{x \in U \mid x \notin A\}.$$

Наглядное представление об этих операциях дают *диаграммы Венна*. На таких диаграммах множества изображаются произвольными фигурами, лежащими в плоскости, соответствующей универсальному множеству U. Иллюстрации данных операций в виде диаграмм Венна приведены на рис.1-4.

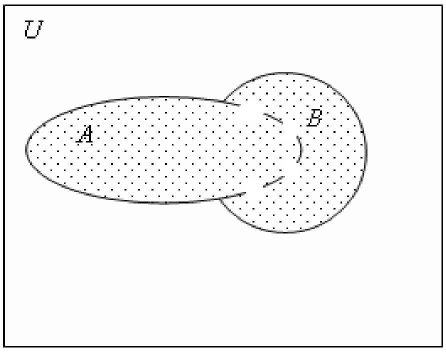

Рис.1. Объединение множеств

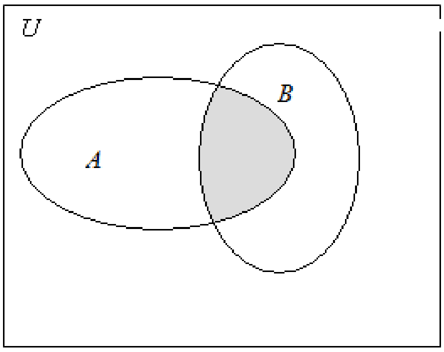

Рис.2. Пересечение множеств

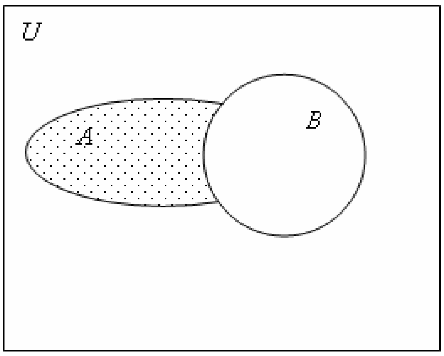

Рис.3. Разность множеств

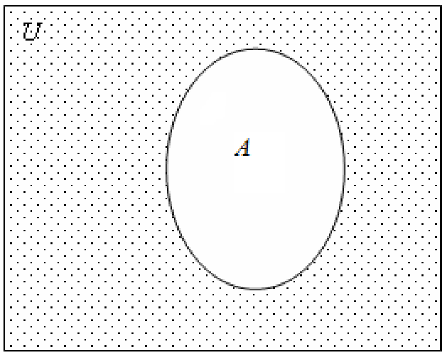

Рис.4. Дополнение множества

Для представления о свойствах операций над множествами приведем некоторые тождества теории множеств:

$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A$ – свойство коммутативности;

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),$
$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ – свойство ассоциативности;

$A \cup \varnothing = A,\ A \cap \varnothing = \varnothing,$
$A \cap \neg A = \varnothing,\ A \cup U = U,$ – действия с пустым и универсальным множествами;
$A \cap U = A,\ A \cup \neg A = U$

(1.1)

$\neg\neg A = A$ – правило двойного дополнения (двойного отрицания);

$A \cup A = A, \quad A \cap A = A$ – свойство идемпотентности;

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ – свойство дистрибутивности;

$\neg(A \cup B) = \neg A \cap \neg B,$
$\neg(A \cap B) = \neg A \cup \neg B$ – правило де Моргана

Пусть далее A, B – произвольные множества. *Декартово произведение* множеств A и B (обозначается как $A \times B$) – это множество всех упорядоченных пар (x_1, x_2) таких, что $x_1 \in A, x_2 \in B$.

Пример. 1.2. При записи шахматной партии используются множества $A = \{a, b, \ldots, h\}$ – для обозначения вертикалей, и $B = \{1, 2, \ldots, 8\}$ – для обозначения горизонталей. Поля шахматной доски обозначаются с помощью элементов множества $A \times B = \{(a,1), (a,2), \ldots, (h,8)\}$.

Заметим, что можно построить декартово произведение произвольного числа множеств:

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \,\middle|\, x_i \in A_i,\ i = 1, \ldots, n \right\}. \quad (1.2)$$

Упорядоченный набор элементов $(x_1, \ldots, x_n)$ будем далее называть *вектором*.

В случае, когда в произведении (1.2) все множители равны между собой, то есть $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A$, говорят про *декартову степень* A^n *множества* A.

1.2. Метод математической индукции

Метод математической индукции является одним из способов строгого доказательства предложений (утверждений), зависящих от натурального аргумента. Суть метода заключается в следующем.

Пусть m *– натуральное число,* $m \geq 1$ *и* $P(n)$ *– предложение, зависящее от* n*, где* $n \geq m$.
Если

1) $P(m)$ *справедливо;*
2) $P(n)$ *будучи истинным предложением, влечет истинность предложения* $P(n+1)$ *для любого натурального* n*,* $n \geq m$*,*

то $P(n)$ *– истинное предложение для любого натурального* n*,* $n \geq m$*.*

Пункт 1 принято называть базой индукции, пункт 2 – шагом индукции. Допущение в пункте 2 справедливости $P(n)$ – индуктивным предположением.

Пример.1.3. Доказать, что для любого натурального n выполняется равенство

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

1) Установим истинность базы индукции. При $n = m = 1$ имеем истинное равенство $1^2 = \frac{1 \cdot (1+1) \cdot (2 \cdot 1 + 1)}{6}$.

2) Докажем, что обоснован шаг индукции. Действительно,

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2 = (1^2 + 2^2 + \ldots + n^2) + (n+1)^2,$$

то есть, согласно индуктивному предположению,

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2.$$

В силу

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)\big((2n^2+n) + 6(n+1)\big)}{6} =$$
$$= \frac{2(n+1)(n^2+3{,}5n+3)}{6} = \frac{2(n+1)(n+1{,}5)(n+2)}{6} =$$
$$= \frac{(n+1)(n+2)\big(2(n+1)+1\big)}{6},$$

получаем

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}.$$

Последнее означает, что шаг индукции реализуется.

Истинность базы индукции и обоснованность шага индукции доказывают, что данное в условии равенство выполняется для всех натуральных чисел.

1.3. Правило суммы и правило произведения

Правило суммы и правило произведения относятся к основным принципам комбинаторики. Для каждого правила приведем формулировки соответствующих теорем и рассмотрим пример.

Теорема (правило суммы). *Если для $k=1,\ldots,n$ элемент x_k можно выбрать m_k способами, причём выбор одного элемента исключает одновременный выбор другого элемента, то число способов выбрать «либо x_1, либо x_2, … либо x_n» равно $m_1+m_2+\ldots+m_n$.*

Теорема (правило произведения). *Если для $k=1,\ldots,n$ элемент x_k можно выбрать m_k способами, то число способов выбрать вектор $(x_1,\ldots,x_n)$ равно $m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_n$.*

Заметим, что доказательство приведенных теорем проводится с использованием метода математической индукции.

Пример.1.4. Пусть имеется пять красных и семь синих шаров. Тогда имеется 5 способов выбрать красный шар и 7 способов выбрать синий шар. Количество способов выбрать один шар без учета цвета определяется по правилу суммы как 5+7=12. Количество способов выбрать сперва красный шар, а затем синий шар определяется по правилу произведения как 5·7=35.

1.4. Размещения и перестановки

Рассмотрим конечное множество *X*, содержащее *n* элементов. Будем называть векторы $(x_1,\ldots,x_m)\in X^m$, $m\le n$ *упорядоченными m-выборками или размещениями из n элементов по m*.

Число различных размещений из *n* по *m* без повторений элементов вычисляется по правилу умножения и составляет

$$A_n^m = n(n-1)\ldots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}. \tag{1.3}$$

В формуле (1.3) использован *факториал*, то есть величина

$$n! = \begin{cases} 1, & n=0, \\ n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1, & n=1,2,3,\ldots \end{cases}$$

В случае $m=n$ формула (1.3) дает *число перестановок из n элементов*

$$P_n = n! \tag{1.4}$$

Правило умножения позволяет также определить *число размещений из n по m с повторениями элементов*

$$\overline{A}_n^m = n^m . \qquad (1.5)$$

Рассмотрим примеры подсчета числа размещений и перестановок.

Пример.1.5. Имеется множество цифр D={0,1,…,9}. Сколько различных шифров из трех цифр можно составить в случаях, когда повторы цифр запрещены либо разрешены?

Имеем n=10, m=3. В случае, когда повторы цифр запрещены, количество шифров определяется по формуле (1.3) и составляет

$$A_{10}^3 = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10!}{7!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720 .$$

Для случая, когда повторы цифр разрешены, количество шифров определяется по формуле (1.5) как $\overline{A}_{10}^3 = 10^3 = 1000$.

Пример.1.6. Сколько способов существует для того, что рассадить 12 зрителей в зале, где имеется 12 мест?

Даная задача сводится к подсчету числа перестановок из 12 элементов. Формула (1.4) позволяет вычислить P_{12}=12!=479001600.

Рассмотрим теперь множество из n элементов при условии, что среди них мы различаем m типов элементов. Пусть k_1 элементов относятся к первому типу, k_2 элементов – ко второму, и так далее, вплоть до k_m элементов последнего типа. При этом $k_1+k_2+\ldots+k_m=n$. Если элементы одного и того же типа для нас неразличимы, то число перестановок должно получаться меньше, чем по формуле (1.4). Действительно, в данном случае мы получаем *перестановки с повторениями*. Число таких перестановок равно

$$P(k_1, k_2, ..., k_m) = \frac{(k_1 + k_2 + ... + k_m)!}{k_1! k_2! ... k_m!} \qquad (1.6)$$

Пример.1.7. Пусть имеется 12 шаров, из них пять красных и семь синих. Сколько разных перестановок мы можем представить, не различая одноцветные шары?

Применим формулу (1.6) при m=2, k_1=5, k_2=7. Тогда искомое число перестановок равно

$$P(5,7) = \frac{(5+7)!}{5! \cdot 7!} = \frac{12!}{5! \cdot 7!} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 8 \cdot 9 \cdot 11 = 792 .$$

Сравнение результатов двух последних примеров иллюстрирует разницу между перестановками с повторениями и без повторений.

1.5. Сочетания

В начале данного пункта докажем следующее утверждение.

Теорема. *Число всех m-элементных неупорядоченных подмножеств множества из n элементов равно*

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{n(n-1)...(n-m+1)}{m(m-1)\cdot ...\cdot 2\cdot 1}. \quad (1.7)$$

Для доказательства рассмотрим сперва различные упорядоченные m-элементные выборки из данного множества. Число таких выборок определяется как A_n^m. Затем учитываем, что в данной теореме речь идет о неупорядоченных подмножествах. Число таких подмножеств по отношению к A_n^m уменьшается кратно числу перестановок из m элементов. Тогда $C_n^m = A_n^m / P_m$, что приводит с учетом формул (1.3) и (1.4) к равенству (1.7).

Подмножества, рассмотренные в теореме, называют также *сочетаниями из n элементов по m*. Величина C_n^m носит название *число сочетаний без повторений из n элементов по m*. Приведем без вывода некоторые известные тождества для числа сочетаний

$$C_n^m = C_n^{n-m}, \qquad C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m \qquad \sum_{m=0}^{n} C_n^m = 2^n, \qquad \sum_{m=0}^{n} (C_n^m)^2 = C_{2n}^m. \quad (1.8)$$

Заметим, что третья формула из (1.8) позволяет ответить на вопрос: сколько всего существует подмножеств у множества из n элементов?

Пример.1.8. Возьмем те же пять красных и семь синих шаров, которые использовали в предыдущих примерах. Сколько вариантов существует для того, чтобы выбрать два шара одинакового цвета?

Для ответа на поставленный вопрос выполним следующие действия.

1) Определим число вариантов для выбора двух красных шаров

$$m_1 = C_5^2 = \frac{5!}{2!\cdot 3!} = \frac{4\cdot 5}{1\cdot 2} = 10.$$

2) Определим число вариантов для выбора двух синих шаров

$$m_2 = C_7^2 = \frac{7!}{2!\cdot 5!} = \frac{6\cdot 7}{1\cdot 2} = 21.$$

3) Воспользуемся правилом суммы и найдем искомое число вариантов выбора пары одноцветных шаров $m = m_1 + m_2 = 10 + 21 = 31$.

Для случая, когда элементы могут использоваться в наборе несколько раз, применяют *число сочетаний с повторениями из n элементов по m*

$$\overline{C}_n^m = C_{n+m-1}^m = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!}. \quad (1.9)$$

Пример.1.9. Сколько разных результатов можно получить при бросании двух игральных костей? Ответ дать для следующих ситуаций
1) если мы отличаем одну кость от другой; 2) если кости неразличимы между собой.

В первом случае число вариантов m определяется по правилу произведения, то есть $m=m_1\cdot m_2=6\cdot 6=36$. Во втором случае $m=\overline{C}_6^2=C_7^2=21$.

1.6. Бином Ньютона. Полиномиальная формула

Термин *биномиальная формула Ньютона* (*бином Ньютона*) – это исторически сложившееся название для следующего утверждения

Теорема. *Для произвольных числовых величин a,b при $n=0,1,2,\ldots$ справедливо равенство*

$$(a+b)^n=\sum_{m=0}^{n}C_n^m a^{n-m}b^m \qquad (1.10)$$

Для доказательства теоремы перемножим последовательно $(a+b)$ n раз. Получим сумму из 2^n слагаемых. Каждое слагаемое будет иметь вид $d_1d_2\ldots d_n$, где $d_i=a$ либо $d_i=b$ $(i=1,\ldots,n)$. Далее сгруппируем слагаемые с одинаковыми степенями b, и представим

$$(a+b)^n=\sum_{m=0}^{n}B_m a^{n-m}b^m .$$

Величина B_m равна числу слагаемых, содержащих степень b^m. Заметим, что количество таких слагаемых равно числу способов определить в произведении $d_1d_2\ldots d_n$ ровно m множителей как $d_i=b$. Другими словами, B_m равно числу различных неупорядоченных выборок из n элементов по m. Но тогда $B_m=C_n^m$ и мы приходим к формуле (1.10).

Формула (1.10) для целых неотрицательных значений n была известна задолго до Ньютона, но ему удалось обобщить результат для случая дробных и отрицательных показателей степени. Число сочетаний C_n^m, которое использовано в формуле бинома Ньютона, принято также называть *биномиальным коэффициентом*.

Для вычисления биномиальных коэффициентов при малых значениях n удобно пользоваться так называемым *треугольником Паскаля*. В этой треугольной таблице нумерация строк начинается с 0, строка с номером n содержит биномиальные коэффициенты для разложения $(a+b)^n$. Каждый коэффициент, кроме крайних двух, которые равны 1, вычисляется как сумма соответствующих коэффициентов предыдущей строки. Это правило обусловлено второй формулой из (1.8). На рис.5 приведен несколько первых строк треугольника Паскаля

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

1 8 28 56 70 56 28 8 1

Рис.5. Фрагмент треугольника Паскаля (n=0,1,2,…,8)

Пример.1.10. Частным случаем бинома Ньютона являются известные из курса школьной математики формулы сокращенного умножения – квадрат суммы и куб суммы. Например,

$$(a+b)^3=\sum_{m=0}^{3}C_3^m a^{3-m}b^m=C_3^0a^{3-0}b^0+C_3^1a^{3-1}b^1+C_3^2a^{3-2}b^2+C_3^3a^{3-3}b^3=$$
$$=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

Значения биномиальных коэффициентов можно вычислить по формуле (1.7) или взять из треугольника Паскаля.

Приведем далее без вывода *полиномиальную формулу*

$$(a_1+a_2+...+a_k)^n=\sum_{k_1+k_2+...+k_m=n}P(k_1,k_2,...,k_m)a_1^{k_1}a_2^{k_2}...a_m^{k_m}. \qquad (1.11)$$

Полиномиальные коэффициенты $P(k_1,k_2,...,k_m)$ в формуле (1.11) определяются как число перестановок с повторениями по формуле (1.6). При n=2 формула (1.11) сводится к биному Ньютона (1.10).

§ 2. Метод включений и исключений

В данном параграфе будет рассмотрена *формула включений и исключений*, которая позволяет находить число элементов в объединении конечного числа конечных множеств. Условимся обозначать число элементов в произвольном конечном множестве A через $m(A)$.

Теорема. *Пусть $A_1,\ldots,A_n$ – произвольные конечные множества. Тогда справедлива формула включений и исключений*

$$m(A_1\cup...\cup A_n)=\sum_{1\le i\le n}m(A_i)-\sum_{1\le i_1<i_2\le n}m(A_{i_1}\cap A_{i_2})+$$
$$+\sum_{1\le i_1<i_2<i_3\le n}m(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap A_{i_3})+...+(-1)^{n-1}m(A_1\cap A_2\cap...\cap A_n). \qquad (1.12)$$

Доказательство теоремы можно найти в учебной литературе [3]. Мы заметим только, что доказательство можно провести методом математической индукции, который рассматривался в пункте 1.2.

П р и м е р . 1.1. Контрольная работа по математике состоит из трех задач: по алгебре, планиметрии и стереометрии. Известно, что контрольную работу выполняли 1000 школьников. Из них задачу по алгебре решили 800, по планиметрии – 700, по стереометрии – 600 человек. При этом задачи по алгебре и планиметрии решили 600 школьников, по алгебре и стереометрии – 500, по планиметрии и стереометрии – 400. Все три задачи решили 300 человек. Существуют ли школьники, не решившие ни одной задачи? Если существуют, то сколько их?

Обозначим: U – множество всех школьников; A – множество школьников, решивших задачу по алгебре; P – множество школьников, решивших задачу по планиметрии; S – множество школьников, решивших задачу по планиметрии. Дано по условию задачи

$$m(U)=1000,\quad m(A)=800,\quad m(P)=700,\quad m(S)=600,$$
$$m(A\cap P)=600,\quad m(A\cap S)=500,\quad m(P\cap S)=400,\quad m(A\cap P\cap S)=300.$$

Искомой величиной является

$$m(\neg(A\cup P\cup S))=m(U)-m(A\cup P\cup S)$$

Вычислим по формуле включений и исключений

$$m(A\cup P\cup S)=m(A)+m(P)+m(S)-$$
$$-m(A\cap P)-m(A\cap S)-m(P\cap S)+m(A\cap P\cap S)=$$
$$=800+700+600-600-500-400+300=900.$$

Тогда $m(\neg(A\cup P\cup S))=1000-900=100$. Таким образом, не решили ни одной задачи 100 школьников.

Задания для самостоятельной работы студентов

Для части задач указан источник из списка литературы. Некоторые задачи многократно встречаются в различных источниках, став «математическим фольклором».

1.1. Запишем предложение «*Четыре усталых молчаливых путника долго пережидали внезапно разразившуюся грозу*». Будем вычеркивать из него слова так, чтобы всякий раз получалось правильное предложение (например, нельзя вычеркнуть слово «*четыре*», но можно вычеркнуть слово «*усталых*»). Вычеркивать слова можно в любом порядке одно за другим. Сколькими способами можно прийти к предложению, из которого уже нельзя вычеркнуть ни одного слова? [3] *Ответ*: 60

1.2. Доказать, что следующие числа – целые [4]

а) $\dfrac{(2n)!}{2^n}$; б) $\dfrac{(3n)!}{2^n 3^n}$; в) $\dfrac{(2n)!}{n!(n+1)!}$.

1.3. В футбольном турнире приняли участие несколько команд, причем каждая команда сыграла с остальными по две матча. Всего состоялось 90 матчей. Сколько было команд?

Ответ: 10

1.4. Имеется m белых и n черных шаров, причем $m > n$. Сколькими способами можно все шары разложить в ряд так, чтобы никакие два черных шара не лежали рядом? [1]

Ответ: C_{m+1}^{n}

1.5. Сколькими способами можно посадить за круглый стол n мужчин и n женщин так, чтобы никакие два лица одного пола не сидели рядом?

Ответ: $2(n!)^2$

1.6. Сколькими способами можно выбрать 6 карт из колоды, содержащей 52 карты, так, чтобы среди них были карты каждой масти? [4]

Ответ: $C_4^1 C_{13}^3 \left(C_{13}^1\right)^3 + C_4^2 \left(C_{13}^2\right)^2 \left(C_{13}^1\right)^2$ 6362512

1.7. Для окраски одной грани кубика требуется 5 секунд. За какое наименьшее время 3 человека могут выкрасить 188 кубиков? Предполагается, что два человека не могут одновременно красить один кубик. [4]

Ответ: 1880 с

1.8. Сессию из трех экзаменов успешно сдал 41 студент. Возможные оценки: 5, 4, 3. Доказать, что по крайней мере пять студентов сдали сессию с одинаковыми оценками. [4]

1.10. Сколькими способами можно упорядочить множество $\{1,2,\ldots,2n\}$ так, чтобы каждое четное число имело четный номер? [3]

Ответ: $(n!)^2$

1.11. Трое сумасшедших маляров принялись красить пол, каждый в свой цвет. Один успел закрасить красным 75% пола, другой зелёным – 70%, третий синим – 65%. Какая часть пола наверняка закрашена всеми тремя красками? [1]

Ответ: 10%

1.12. Сколько существует шестизначных чисел, у которых каждая последующая цифра меньше предыдущей? [1]

Ответ: 210

2. КОМБИНАТОРНЫЕ МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Вторая часть настоящего пособия посвящена задачам вычисления вероятности событий, решение которых основано на идеях и методах, рассмотренных в предыдущей части. Изложение вероятностных вопросов базируется на аксиоматическом подходе, при этом классическая вероятность вводится как один из вариантов вероятностной меры, заданной на конечной алгебре событий. Приведен краткий обзор основных определений и теорем, относящихся к случайным событиям и их вероятностям. Отметим, что приведенные теоретические сведения не являются систематическим введением в теорию вероятностей, а имеют целью лишь сделать материал независимым от других источников. При этом основное внимание уделено вопросам, при рассмотрении которых естественным образом возникает необходимость использования комбинаторных методов.

§ 1. Случайные события и их вероятности

1.1. Операции над событиями. Алгебры и сигма-алгебры событий

Определение. *Случайное событие – это событие, о котором при данных условиях нельзя заранее сказать, произойдет оно или нет. Совокупность условий, сопровождающих случайное событие, (если их можно воспроизвести неоднократно) называют случайным экспериментом или испытанием.*

Случайные события (далее – просто «события») обозначают прописными латинскими буквами $A, B, C, \ldots$

Определение. *Исход данного случайного эксперимента, не разложимый на более простые исходы, называется элементарным исходом или элементарным событием. Элементарные события обозначают как $\omega_1, \omega_2, \ldots$ или просто ω. Множество всех элементарных событий данного случайного эксперимента называют пространством элементарных событий и обозначают Ω.*

Определение. *Пусть A – некоторое (элементарное или нет) событие в данном испытании. Говорят, что данный элементарный исход $\omega \in \Omega$ благоприятствует наступлению события A, если A происходит одновременно с ω.*

Математической моделью случайного эксперимента служит некоторое абстрактное множество Ω, элементы которого ω (точнее, одноэлементные подмножества $\{\omega\} \subset \Omega$) изображают элементарные события, а прочие подмножества $A \subseteq \Omega$ – сложные события, состоящие из элементарных событий, благоприятствующих A.

Все множество Ω отождествляется с *достоверным событием* (т.е. с тем, которое заведомо происходит в данном испытании), пустое множество $\varnothing$ – с *невозможным событием* (с тем, которое не может произойти).

Определение. *Произведением событий A и B называется событие $C = AB$, состоящее в том, что A и B произошли одновременно.*

Произведению событий A и B соответствует пересечение изображающих их множеств: $A \cap B$.

Определение. *Суммой событий A и B называется событие $C = A + B$, состоящее в том, что произошло хотя бы одно из этих событий.*

Сумме событий A и B соответствует объединение изображающих их множеств: $A \cup B$.

Определение. *Разностью событий A и B называется событие $C = A - B$, состоящее в том, что A произошло, а B не произошло.*

Разности событий A и B соответствует теоретико-множественная разность изображающих их множеств: $A \setminus B$.

Определение. *Говорят, что событие A влечет событие B, если B происходит всякий раз, когда произошло событие A.*

Отношению «событие A влечет событие B» соответствует отношение «A есть подмножество B» изображающих их множеств: $A \subseteq B$.

Определение. *События A и B называются несовместными, если наступление любого из них исключает наступление другого.*

Несовместным событиям A и B соответствуют не пересекающиеся множества: $A \cap B = \varnothing$.

Определение. *Если A – некоторое событие, то противоположным ему называется событие $\overline{A}$, состоящее в том, что A не произошло.*

Противоположному событию $\overline{A}$ соответствует дополнение $\Omega \setminus A$ множества A до всего пространства Ω.

Замечание. В дальнейшем мы не будем различать событие A, наступающее в рамках некоторого случайного эксперимента, и множество A, изображающее его в соответствующей математической модели. Кроме, того для обозначения операций над событиями, наряду с приведенными выше, мы будем использовать теоретико-множественные обозначения. Например, записи $C = AB$ и $C = A \bigcap B$ означают одно и то же – произведение событий A и B.

Определение. *Совокупность $\mathscr{A}$ множеств $A \subseteq \Omega$ называется алгеброй событий, если она содержит Ω и из условия $A \in \mathscr{A}$, $B \in \mathscr{A}$ следует, что $A + B \in \mathscr{A}$, $AB \in \mathscr{A}$ и $A - B \in \mathscr{A}$.*

Иначе говоря, алгебра событий – это система $\mathscr{A}$ подмножеств множества Ω и замкнутая относительно операций объединения, пересечения и взятия разности. Поскольку с прикладной точки зрения естественно требовать, чтобы сумма, призведение и разность событий снова были событиями, алгебра является тем минимальным «запасом» множеств, который гарантирует выполнение этого требования.

Если пространство элементарных событий Ω *конечно*, то алгебра $\mathscr{A}$ является не только минимальным, но и достаточным запасом множеств для построения полноценной теории. Если же множество Ω оказывается *бесконечным*, то требуется выполнение некоторых дополнительных условий, которые приводят к понятию т.н. *сигма-алгебры*.

Определение. *Бесконечное множество A называется счетным, если его элементы можно занумеровать натуральными числами т.е. представить в виде последовательности неповторяющихся элементов* $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$ *,где* $a_i \neq a_j$, $i \neq j$. *В противном случае бесконечное множество называется несчетным.*

Доказано, что среди бесконечных множеств существуют как счетные, так и несчетные. Примерами счетных множеств служат множества всех натуральных, целых или рациональных чисел. Множество действительных чисел (числовая прямая), множество точек плоскости, любой числовой промежуток являются примерами несчетных множеств.

Определение. *Алгебра событий* $\mathscr{A}$, *называется* σ*-алгеброй (сигма-алгеброй), если она замкнута относительно счетного числа операций объединения, т.е., если из условия* $A_1, A_2, \dots, A_n \ldots \in \mathscr{A}$ *следует* $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots \in \mathscr{A}$.

Замечание. Можно доказать, что из замкнутости алгебры событий относительно счетного объединения следует замкнутость относительно счетного числа любых других операций над событиями. В частности, если $\mathscr{A}$ удовлетворяет условиям из определения σ-алгебры, то $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \cap \ldots \in \mathscr{A}$.

В настоящем издании мы ограничимся рассмотрением только конечных пространств Ω. Наиболее часто в этом случае в качестве алгебры событий $\mathscr{A}$ берут множество всех подмножеств множества Ω (включая само Ω и $\varnothing$). Оно называется *булеаном* Ω и обозначается через 2^Ω. Выше в формуле (1.8) было отмечено, что если множество $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ состоит из n элементов, то множество всех его подмножеств содержит 2^n элементов. Этим оправдано обозначение 2^Ω.

1.2. Вероятность случайного события и ее свойства

Вероятность события A интуитивно понимается как численная мера «ожидаемости» наступления этого события, заключенная в пределах от нуля до единицы. Чем ближе вероятность события к единице, тем больше оснований ожидать, что оно наступит при данных условиях.

В настоящее время общепринятым является аксиоматический подход к определению вероятности, предложенный А.Н. Колмогоровым в 30-х годах XX века. В рамках этого подхода вероятность (вероятностную меру) определяют как числовую функцию $\mathsf{P}(A)$, заданную на некотором множестве случайных событий и удовлетворяющую определенному набору условий (аксиом).

Аксиома 1. *Пусть Ω – пространство элементарных событий и $\mathscr{A}$ – некоторая σ-алгебра событий. Каждому событию $A \in \mathscr{A}$ ставится в соответствие неотрицательное число $\mathsf{P}(A)$, называемое его вероятностью.*

Аксиома 2. *Вероятность достоверного события равна единице:*

$$\mathsf{P}(\Omega) = 1.$$

Аксиома 3 (счетная аддитивность вероятностной меры). *Если события $A_1, A_2, \ldots, A_i, \ldots$ попарно несовместны, то*

$$\mathsf{P}(A_1 + A_2 + \ldots + A_i + \ldots) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathsf{P}(A_i).$$

В частности, для конечного числа n попарно несовместных событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ имеет место равенство

$$\mathsf{P}(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = \mathsf{P}(A_1) + \mathsf{P}(A_2) + \ldots + \mathsf{P}(A_n).$$

Свойство, выражаемое последним равенством называется *конечной аддитивностью* вероятностной меры.

Аксиома 4 (аксиома непрерывности). *Пусть дана невозрастающая последовательность $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots \supseteq A_n \supseteq \ldots$ множеств из $\mathscr{A}$, и пусть $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. Тогда $\mathsf{P}(A) = \lim\limits_{n \to \infty} \mathsf{P}(A_n)$.*

З а м е ч а н и е. Можно доказать, что аксиомы 3 и 4 эквивалентны друг другу.

Следствия из аксиом

I. *Вероятность невозможного события равна нулю:* $\mathsf{P}(\varnothing) = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Запишем $\Omega = \Omega \bigcup \varnothing$. Тогда на основании аксиом 1-3 будем иметь $1 = \mathsf{P}(\Omega) = \mathsf{P}(\Omega) + \mathsf{P}(\varnothing) = 1 + \mathsf{P}(\varnothing)$, откуда $\mathsf{P}(\varnothing) = 0$.

II. *Для любого $A \in \mathscr{A}$*

$$0 \le \mathsf{P}(A) \le 1.$$

Доказательство. Запишем $\Omega = A \bigcup \overline{A}$. Тогда в силу аксиом 1-3 получим

$$0 \le \mathsf{P}(A) \le \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(\overline{A}) = \mathsf{P}(\Omega) = 1.$$

III. *Для любого* $A \in \mathscr{A}$

$$\mathsf{P}(\overline{A}) = 1 - \mathsf{P}(A).$$

Доказательство. Снова представим Ω в виде $\Omega = A \bigcup \overline{A}$. Тогда из аксиом 2 и 3 следует, что $1 = \mathsf{P}(\Omega) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(\overline{A})$, откуда $\mathsf{P}(\overline{A}) = 1 - \mathsf{P}(A)$.

IV. *Если событие* A *влечет за собой событие* B, *то*

$$\mathsf{P}(A) \le \mathsf{P}(B).$$

Доказательство. События A и $B \setminus A$ несовместны и по аксиоме 1 $P(B \setminus A) \ge 0$. Тогда $\mathsf{P}(B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B \setminus A) \ge \mathsf{P}(A)$.

V. (Теорема сложения вероятностей). *Если* A *и* B *– произвольные (не обязательно несовместные) события, то*

$$\mathsf{P}(A + B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(AB).$$

Доказательство. Запишем $A + B = A + (B \setminus A)$, откуда в силу несовместности A и $B \setminus A$ будем иметь $\mathsf{P}(A + B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B \setminus A)$. Далее, $\mathsf{P}(B) = \mathsf{P}(B \setminus A) + \mathsf{P}(AB)$, так что $\mathsf{P}(B \setminus A) = \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(AB)$. Подставляя это выражение в равенство $\mathsf{P}(A + B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B \setminus A)$, получим $\mathsf{P}(A + B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(AB)$.

Определение. *Вероятностным пространством называют тройку объектов* $(\Omega, \mathscr{A}, \mathsf{P})$, *где* Ω *– пространство элементарных событий,* $\mathscr{A}$ *–* σ*-алгебра его подмножеств, называемых случайными событиями,* $\mathsf{P}(A)$ *– вероятность, определенная на* σ*-алгебре* $\mathscr{A}$.

В современной теории вероятностей построение вероятностного пространства $(\Omega, \mathscr{A}, \mathsf{P})$ является исходным моментом для математического описания и моделирования любых случайных явлений и процессов.

Пример 2.1. Пусть случайный эксперимент состоит в однократном подбрасывании симметричной монеты. Рассмотрим события: $\omega_1 = \{0\}$ – выпадение «орла», $\omega_2 = \{1\}$ – выпадение «решки», $\varnothing$ – невозможное, $\Omega = \{0;1\}$ – достоверное. Тогда

$$\mathscr{A} = \{\varnothing; \{0\}; \{1\}; \{0;1\}\}$$

Зададим вероятность на событиях из $\mathscr{A}$ так:

$$\mathsf{P}(\varnothing) = 0; \mathsf{P}(\{0\}) = \mathsf{P}(\{1\}) = 1/2; \mathsf{P}(\{0;1\}) = 1.$$

Тем самым полностью построено вероятностное пространство $(\Omega, \mathscr{A}, \mathsf{P})$, соответствующее данному случайному эксперименту.

§ 2. Классическое определение вероятности

Аксиомы вероятности и следствия из них описывают общие свойства, которыми должна обладать вероятность случайного события. При этом конкретные способы приписать данному событию ту или иную вероятность могут быть различными. Среди таких способов наиболее простым (и первым в историческом отношении) является метод, основанный на так называемом классическом определении вероятности. Хотя это определение имеет многовековую историю, оно и в настоящее время находит широкое применение в самых различных областях знаний (в генетике, информатике, статистической физике и т.д.).

Предположим, что проводится случайный эксперимент с конечным числом элементарных исходов $\Omega = \{\omega_1; \omega_2; \ldots; \omega_n\}$, и пусть имеются основания (например, соображения симметрии) считать эти исходы равновозможными:

$$\mathsf{P}(\omega_1) = \mathsf{P}(\omega_2) = \ldots = \mathsf{P}(\omega_n) = \frac{1}{n}.$$

Зададим вероятность на $\mathscr{A} = 2^\Omega$ следующим образом. Если событию $A \in 2^\Omega$ благоприятствуют k элементарных событий $\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \ldots, \omega_{i_k}$, то его вероятность положим равной

$$\mathsf{P}(A) = \sum_{m=1}^{k} \mathsf{P}(\omega_{i_m}) = \frac{k}{n},$$

в частности, $\mathsf{P}(\Omega) = \sum_{m=1}^{n} \mathsf{P}(\omega_m) = \frac{n}{n} = 1$. Очевидно, что все аксиомы вероятности для введенной нами функции множества выполнены. Определение вероятности события A, на основе изложенного подхода называется *классическим*. Кратко это определение можно сформулировать так:

при указанных выше условиях вероятность события A равна отношению числа элементарных исходов, благоприятствующих событию A к общему числу элементарных исходов

$$\mathsf{P}(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)},$$

где символом $m(A)$ обозначено число элементов множества A.

П р и м е р 2.1. Случайный эксперимент состоит в однократном выбрасывании двух игральных костей. Найти вероятность того, что сумма выпавших на двух костях очков кратна пяти.

Р е ш е н и е. Каждый элементарный исход зададим упорядоченной парой чисел (i, j), где i – число очков, выпавшее на первой кости, j – на второй, $1 \le i, j \le 6$. Общее число элементарных исходов равно $n = 6^2 = 36$. Событию A={сумма очков кратна 5} , благоприятствуют k=7 элементарных исходов:

5+5=10, 6+4=10, 4+6=10, 1+4=5, 4+1=5, 2+3=5, 3+2=5.

Таким образом, $\mathsf{P}(A) = \dfrac{k}{n} = \dfrac{7}{36}$.

§ 3. Урновая схема

В примере 2.1 число всех элементарных событий $m(\Omega)$ и число $m(A)$ событий, благоприятствующих событию A, легко получалось непосредственным подсчетом. Однако в большинстве практически важных задач числа $m(\Omega)$ и $m(A)$ настолько велики, что непосредственный подсчет невозможен. Кроме того, логическая структура условий, определяющих эти числа, может быть весьма сложной, что также исключает непосредственный подсчет. Во всех таких случаях для вычисления $m(\Omega)$ и $m(A)$ приходится использовать подходы, связанные с комбинаторным анализом, в частности, те, которые были рассмотрены в первой части пособия

При подсчете вероятностей в рамках классического определения удобной моделью эксперимента является так называемая *урновая схема*. Пусть случайный эксперимент состоит в выборе наудачу k элементов из n различных элементов некоторого множества $E = \{e_1; e_2; ...; e_n\}$. Для определенности будем считать, что имеется урна с n неразличимыми на ощупь, но пронумерованными шарами, из которой наудачу извлекают k шаров. При этом имеются два различных способа действий – *случайный выбор без возвращения*, когда вынутый шар обратно не возвращается и *случайный выбор с возвращением*, когда извлеченный шар всякий раз возвращается в урну. Кроме того, мы можем учитывать порядок, в котором появляются извлекаемые шары, тогда результатом эксперимента будет *упорядоченная выборка*. Если же учитывается только состав шаров в выборке, но не их порядок, то получаем *неупорядоченную выборку*.

В зависимости от того, какой из четырех описанных вариантов реализуется (упорядоченный выбор с возвращением, неупорядоченный без возвращения и т.д.), мы будем получать различные множества Ω элементарных событий. Для подсчета общего числа элементов $m(\Omega)$ в этих множествах применяются различные комбинаторные числа, введенные в первой части методических указаний. Далее мы рассмотрим каждый из четырех упомянутых случаев отдельно, при этом нам понадобятся некоторые дополнительные обозначения. Пусть урна содержит n шаров с номерами 1, 2,…, n. Условимся записывать упорядоченную выборку, состоящую из k шаров в виде $(a_1, a_2, ..., a_k)$, где a_i – номер шара, извлеченного на i-м шаге, а неупорядоченную – в виде $[a_1, a_2, ..., a_k]$. Например, если в урне 5 шаров, то при выборе без возвращения четырех шаров записи (2,3,1,5) и (3,1,2,5) соответствуют двум различным упорядоченным выборкам с одинаковым составом шаров. Запись [1,2,3,5] означает неупорядоченную выборку с тем же составом шаров, что и две предыдущие (для определенности мы расположили номера в порядке возрастания).

3.1. Схема выбора, приводящая к сочетаниям

Будем предполагать, что $k \le n$ и что извлеченные шары обратно не возвращаются. В этом случае, как было отмечено, имеются две возможности, связанные с тем, считаем ли мы выборки упорядоченными или нет. Если рассматриваются неупорядоченные выборки, то

$$\Omega = \{\omega : \omega = [a_1, a_2, ..., a_k],\ a_i \ne a_j,\ i \ne j,\ a_i = 1, 2, ..., n\},$$

т.е. элементарными исходами будут сочетания без повторений из n по k, число которых согласно (1.7) равно

$$m(\Omega) = C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

П р и м е р 2.2. Из партии, содержащей n изделий, среди которых l бракованных, наудачу извлекают k изделий для контроля. Найти вероятность события A = {в полученной выборке ровно r изделий бракованные}.

Р е ш е н и е. Из условия ясно, что $k \le n$ и $r \le k$. Занумеруем изделия числами от 1 до n, и пусть множество номеров E_1 = {1, 2, ..., $n-l$} соответствует годным изделиям, а множество номеров E_2 = {$n-l+1$,…, n} – бракованным изделиям.

Согласно условию задачи, производится неупорядоченный выбор без возвращения k элементов из множества $E = E_1 \cup E_2$ ={1, 2, ..., n}. Поэтому $m(\Omega) = C_n^k$. Событию A благоприятствуют только такие исходы, при которых r элементов выборки принадлежат E_2, а остальные $k-r$ элементов – множеству E_1. Бракованные изделия в количестве r штук можно выбрать из имеющихся l штук C_l^r способами. Оставшиеся $k-r$ годных изделий из $n-l$ имеющихся – C_{n-l}^{k-r} способами. По комбинаторному правилу произведения (см. п. 1.3) получаем, что число всех интересующих нас исходов равно $m(A)=C_l^r C_{n-l}^{k-r}$, так что искомая вероятность есть

$$\mathsf{P}(A)=\frac{C_l^r C_{n-l}^{k-r}}{C_n^k}. \qquad (2.1)$$

З а м е ч а н и е. Формулу (2.2) можно применять и в тех случаях, когда по условию в выборке должны быть только годные или только бракованные детали. Например, если искать вероятность того, что все отобранные детали оказались бракованными, получим из (2.1) с учетом $k=r$, $C_{n-l}^0=1$,

$$\mathsf{P}(A)=\frac{C_l^k}{C_n^k}.$$

3.2. Схема выбора, приводящая к размещениям

В случае упорядоченных выборок без возвращения пространство элементарных событий имеет вид

$$\Omega=\{\omega:\omega=(a_1,a_2,...,a_k),\ a_i\neq a_j,\ i\neq j,\ a_i=1,2,...,n\}.$$

Каждая такая выборка представляет собой размещение из n по k без повторений. Их число, в соответствии с (1.3), равно

$$m(\Omega)=A_n^k=\frac{n!}{(n-k)!},$$

П р и м е р 2.3. Имеется 8 карточек, на которых записаны первые 8 букв русского алфавита. Наугад без возвращения отбирают 5 карточек и из полученных в порядке поступления букв составляют слово. Найти вероятность того, что составленное указанным способом слово будет оканчиваться буквой «*б*»?

Р е ш е н и е. В данном случае $m(\Omega)$ – это число всех 5-буквенных слов в данном опыте. Оно равно числу 5-элементных упорядоченных подмножеств из 8 элементов, т.е.

$$m(\Omega)=A_8^5=8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4.$$

Рассмотрим событие A = {наудачу составленное указанным способом слово оканчивается буквой «*б*»}. Число элементов множества A равно числу способов разместить на четыре оставшиеся места по одному символу из 7 (символ «*б*» исключен из рассмотрения, поскольку его место уже определено); таким образом,

$$m(A)=A_7^4=7\cdot6\cdot5\cdot4,$$

так что $$\mathrm{P}(A)=\frac{m(A)}{m(\Omega)}=\frac{7\cdot6\cdot5\cdot4}{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4}=\frac{1}{8}=0{,}125.$$

3.3. Схема выбора, приводящая к сочетаниям с повторениями

В этом случае каждая компонента a_i может принимать любое из значений 1,2,…,*n*, в отличие от выбора без возвращения, где номера шаров повторяться не могут, т. е. $a_i \neq a_j, i \neq j$. Кроме того, естественное при выборе без возвращения условие $k \leq n$ теперь, вообще говоря, не выполняется.

Если рассматриваются неупорядоченные выборки с возвращением, то пространство элементарных событий Ω выглядит следующим образом:

$$\Omega = \{\omega : \omega = [a_1, a_2, ..., a_k], a_i = 1,2,..., n\},$$

т.е. элементарными исходами будут сочетания с повторениями из *n* по *k*, число которых согласно (1.9) равно

$$m(\Omega) = C_{n+k-1}^{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}.$$

П р и м е р 2.4. Во время карточного фокуса из стандартной колоды, содержащей 36 карт, последовательно достают и показывают зрителям 3 карты. При этом каждый раз извлеченная карта возвращается обратно в колоду и карты тщательно перемешиваются. Найти вероятность событий *A*={все показанные карты имеют разную масть}, *B*={все показанные карты имеют одну и ту же масть}.

Р е ш е н и е. Пронумеруем масти числами от 1 до 4 и рассмотрим урновую схему выбора с возвращением для $n = 4$. Поскольку в колоде имеется равное количество карт каждой масти и появление любой карты равновероятно, извлечение карты масти с номером i, $i = 1,2,3,4$, эквивалентно извлечению шара с тем же номером. Следовательно, число всех равновероятных исходов данного эксперимента равно числу сочетаний с повторениями из 4 элементов по 3, т.е.

$$m(\Omega) = C_{4+3-1}^{3} = C_6^3.$$

Число исходов, благоприятствующих событию *A*, равно числу способов отобрать без возвращения 3 шара из 4, т.е. $m(A) = C_4^3$. Поэтому

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{C_4^3}{C_6^3} = \frac{4!}{6!} = \frac{1}{30} \approx 0{,}03.$$

Число исходов, благоприятствующих событию *B*, равно числу способов выбрать один шар из четырех, $m(A) = C_4^1$, поэтому

$$P(B) = \frac{m(B)}{m(\Omega)} = \frac{C_4^1}{C_6^3} = \frac{4 \cdot 3! \cdot 3!}{6!} = \frac{1}{5} = 0{,}2.$$

З а м е ч а н и е. При решении задачи важен был тот факт, что появление любой масти равновероятно. Проведенное рассуждение применимо к любой ситуации, когда выбираемый объект с равной вероятностью принадлежит одному из нескольких непересекающихся классов. Сколько объектов содержит каждый класс (в нашем случае 9) при этом несущественно – количество может быть любым, даже бесконечным.

3.4. Схема выбора, приводящая к размещениям с повторениями

При рассмотрении упорядоченных выборок с возвращением, получаем следующее пространство элементарных событий Ω:

$$\Omega = \{\omega : \omega = (a_1, a_2, ..., a_k), a_i = 1,2,...,n\},$$

так что элементарными исходами будут размещения с повторениями из n по k, число которых в силу (1.5) равно

$$m(\Omega) = k^n.$$

П р и м е р 2.5. Имеется 10 одинаковых шариков, которые случайным образом рассыпаются по 6 лункам (в одну лунку может поместиться любое число шариков). Сколько существует различных способов распределения 10 шариков по 6 лункам? Какова вероятность того, что в результате данного опыта первая, третья и четвертая лунки окажутся пустыми (при этом могут оказаться пустыми и еще какие-либо лунки)?

Р е ш е н и е. Пронумеруем лунки и шарики. Можно считать, что опыт состоит в 10-кратном выборе (т.е. $k = 10$) с возвращением номера лунки a_i, $1 \le a_i \le 6$, так что элементарным событием будет 10-компонентный упорядоченный вектор $(a_1, a_2, ..., a_{10})$. Таким образом, число всех способов распределить 10 шариков по 6 лункам равно числу размещений с повторениями из 6 по 10 , т. е. $m(\Omega) = 6^{10}$.

Событие A={первая, третья и четвертая лунки окажутся пустыми} соответствует такому вектору $(a_1, a_2, ..., a_{10})$, компоненты которого могут принимать лишь значения $a_i = 2, 5, 6$, поскольку номера 1, 3 и 4 из рассмотрения исключены. Поэтому $m(A) = 3^{10}$. Имеем

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \left(\frac{3}{6}\right)^{10} = \frac{1}{1024} \approx 0{,}0009.$$

§ 4. Подсчет вероятностей с помощью формулы включений-исключений

Рассмотрим еще одно применение формулы (1.12). Пусть $k_1 k_2 ... k_n$ - некоторая перестановка чисел $1,2,...,n$. Будем говорить, что в этой перестановке число i стоит на своем месте, если $k_i = i$. Например, в перестановке 52143 числа 2 и 4 стоят на своем месте. Перестановка называется *беспорядком*, если ни одно из ее чисел не стоит на своем месте.

П р и м е р 2.6. Найти количество беспорядков, образованных числами $1,2,\ldots,n$.

Р е ш е н и е. Это количество можно получить, вычитая из общего числа перестановок $n!$ число перестановок, в которых хотя бы один элемент стоит на своем месте. Пусть A_i - множество перестановок, у которых число i, $i=1,2,\ldots n$, стоит на своем месте. Тогда искомое число N беспорядков будет равно

$$N=n!-m(A_1\cup\ldots\cup A_n)=n!-\sum_{1\le i_1\le n}m(A_{i_1})+\sum_{1\le i_1<i_2\le n}m(A_{i_1}\cap A_{i_2})-$$

$$-\sum_{1\le i_1<i_2<i_3\le n}m(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap A_{i_3})+\ldots+(-1)^n m(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n).$$

Очевидно, что $m(A_i)=(n-1)!$, значит

$$\sum_{1\le i_1\le n}m(A_{i_1})=n(n-1)!=n!.$$

Аналогично,

$m(A_{i_1}\cap A_{i_2})=(n-2!)$, откуда

$$\sum_{1\le i_1<i_2\le n}m(A_{i_1}\cap A_{i_2})=C_n^2\cdot(n-2)!=\frac{n!}{2!}.$$

Далее, $m(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap A_{i_3})=(n-3)!$, так что

$$\sum_{1\le i_1<i_2<i_3\le n}m(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap A_{i_3})=C_n^3\cdot(n-3)!=\frac{n!}{3!}.$$

Теперь уже видна общая закономерность

$$\sum_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_k\le n}m(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\ldots\cap A_{i_k})=\frac{n!}{k!},\ k=1,2,\ldots,n,$$

и мы получаем нужную формулу

$$N=n!-n!+\frac{n!}{2!}-\frac{n!}{3!}+\ldots+(-1)^n=n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}. \tag{2.2}$$

Следующая вероятностная задача известна в разных формулировках (как задача о письмах и конвертах, о рассеянной секретарше, о раздаче подарков и т.п.) и основана на подсчете числа беспорядков.

П р и м е р 2.7. Секретарша должна была вложить n писем в n заранее подписанных конвертов и разослать их по адресам. По рассеянности она разложила письма случайным образом, при этом в каждый конверт попало по письму. Найти вероятность события A={хотя бы одно письмо оказалось в нужном конверте}.

Р е ш е н и е. Будем считать, что все $n!$ вариантов распределения писем по конвертам равновероятны. Число вариантов, в которых есть хотя бы одно совпадение письма и конверта равно тогда $n!-N$, где N - число беспорядков образованных числами $1,2,\ldots,n$ и определяемое формулой (2.2). Имеем

$$\mathsf{P}(A)=\frac{n!-N}{n!}=1-\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}. \quad (2.3)$$

Выражение $\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$ есть n-я частичная сумма разложения

$$e^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}. \quad (2.4)$$

Поэтому предел правой части (2.3) при $n\to\infty$ равен

$$\lim_{n\to\infty}\mathsf{P}(A)=1-\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}=1-\frac{1}{e}.$$

Ряд (2.4) очень быстро сходится, так как оценка остатка имеет вид

$$\left|e^{-1}-\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\right|<\frac{e}{(n+1)!}$$

Поэтому число $1-e^{-1}\approx 0{,}6321$ дает хорошее приближение для искомой вероятности уже при сравнительно небольших значениях n. Например, при $n=6$ последнее равенство верно с точностью до 4 знаков после запятой. Заметим, что найденная вероятность существенно превосходит вероятность e^{-1} того, что ни одно письмо не попадет в нужный конверт.

§ 5. Условная вероятность. Независимость событий

Определение. *Пусть* $(\Omega,\mathscr{A},\mathsf{P})$ *– произвольное вероятностное пространство,* $A,B\in\mathscr{A}$ *– события, причем,* $\mathsf{P}(B)>0$. *Условной вероятностью события A при условии, что произошло событие B, называется число*

$$\mathsf{P}(A\,|\,B)=\frac{\mathsf{P}(A\cap B)}{\mathsf{P}(B)},$$

Если выполнено неравенство $\mathsf{P}(A)>0$, то аналогично можно определить условную вероятность события *B* при условии *A*

$$\mathsf{P}(B\,|\,A)=\frac{\mathsf{P}(A\cap B)}{\mathsf{P}(A)}.$$

Пример 2.8. Студент, готовясь к экзамену, выучил из 40 билетов только половину – билеты с номерами от 1 до 20. К моменту, когда он пришел на экзамен, осталось только 25 билетов с номерами от 16 до 40. Рассмотрим события

A={студент получил выученный билет},

B={остались билеты с номерами от 16 до 40}

и найдем $\mathsf{P}(A|B)$. Элементарным исходом будет номер вытянутого студентом билета, так что Ω={1,2,…,40}. Если вычислять вероятность A при условии, что наступило событие B, то благоприятными исходами следует считать только те, которые совместимы с B; их число равно $|A\bigcap B|=5$. Число всех возможных исходов при дополнительной информации о наступившем B теперь будет равно $|B|=25$ так что

$$\mathsf{P}(A|B)=\frac{|A\bigcap B|}{|B|}=\frac{5}{25}=\frac{1}{5}.$$

З а м е ч а н и е. Мы видели, что при использовании классического определения условная вероятность равна $\mathsf{P}(A|B)=|AB|/|B|$. Если учесть, что безусловные вероятности событий $A\bigcap B$ и B в этом случае равны, соответственно, $\mathsf{P}(AB)=|A\bigcap B|/|\Omega|$ и $\mathsf{P}(B)=|B|/|\Omega|$, то условную вероятность $\mathsf{P}(A|B)$ можно записать в виде

$$\mathsf{P}(A|B)=\frac{|A\bigcap B|/|\Omega|}{|B|/|\Omega|}=\frac{\mathsf{P}(A\bigcap B)}{\mathsf{P}(B)}.$$

Это равенство, с учетом высказанных соображений, объясняет, почему условную вероятность естественно определить выражением $\mathsf{P}(A|B)=\mathsf{P}(A\bigcap B)/\mathsf{P}(B)$.

О п р е д е л е н и е. *События A и B называются независимыми, если*

$$\mathsf{P}(A\bigcap B)=\mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B). \tag{2.5}$$

С содержательной точки зрения независимость событий означает отсутствие физического влияния любого из них на вероятность наступления другого.

П р и м е р 2.9. Пусть, брошены две игральные кости. Тогда события A={на первой кости выпало 5 очков} и B={на второй кости выпало четное число} будут независимыми, поскольку кости никак не взаимодействуют друг с другом. С другой стороны, $\mathsf{P}(A)=1/6$, $\mathsf{P}(B)=1/2$, событию $A\bigcap B$ благоприятствуют элементарные исходы (5,2), (5,4), (5,6), так что $\mathsf{P}(A\bigcap B)=3/36=1/6\cdot 1/2=\mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B)$. Таким образом, формальному определению независимости (2.5) эти события также удовлетворяют.

При истолковании независимых событий как причинно не связанных естественно ожидать, что их условные вероятности совпадают с безусловными. Действительно, справедлива следующая

Т е о р е м а. *Пусть* $\mathsf{P}(B)>0$. *Тогда для независимости событий A и B необходимо и достаточно, чтобы* $\mathsf{P}(A)=\mathsf{P}(A|B)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если события A и B независимы, то

$$\mathsf{P}(A\,|\,B)=\frac{\mathsf{P}(A\cap B)}{\mathsf{P}(B)}=\frac{\mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B)}{\mathsf{P}(B)}=\mathsf{P}(A).$$

Обратно, если $\mathsf{P}(A)=\mathsf{P}(A\,|\,B)$, то из равенства

$$\mathsf{P}(A\,|\,B)=\frac{\mathsf{P}(A\cap B)}{\mathsf{P}(B)}=\mathsf{P}(A)$$

следует, что

$$\mathsf{P}(A\cap B)=\mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B).$$

Замечание. Не следует путать понятия *независимости* и *несовместности* событий. Если $\mathsf{P}(A)>0$, $\mathsf{P}(B)>0$, то из несовместности A и B всегда следует их зависимость. Действительно, несовместность означает, что наступление одного события исключает наступление другого. Поэтому влияние одного события на другое не только имеет место, но и является строго детерминированным (неслучайным). Кроме того, нарушается и формальное требование независимости, поскольку в этом случае

$$\mathsf{P}(A\cap B)=\mathsf{P}(\varnothing)=0\neq\mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B)>0.$$

С другой стороны, если выполнено хотя бы одно из равенств $\mathsf{P}(A)=0$ или $\mathsf{P}(B)=0$, то несовместные события A и B будут и независимыми.

Теорема. *Если события A и B независимы, то независимыми будут и пары событий A и $\overline{B}$, $\overline{A}$ и B, $\overline{A}$ и $\overline{B}$.*

Доказательство. Представим A в виде $A=(A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})$. В силу того, что события $A\cap B$ и $A\cap\overline{B}$ несовместны, будем иметь

$$\mathsf{P}(A)=\mathsf{P}(A\cap B)+\mathsf{P}(A\cap\overline{B}),$$

откуда

$$\mathsf{P}(A\cap\overline{B})=\mathsf{P}(A)-\mathsf{P}(A\cap B)=\mathsf{P}(A)-\mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B)=\mathsf{P}(A)(1-\mathsf{P}(B))=\mathsf{P}(A)\mathsf{P}(\overline{B})$$

Теперь, по доказанному, из независимости A и B следует независимость $\overline{A}$ и B , а из независимости $\overline{B}$ и A – независимость $\overline{B}$ и $\overline{A}$.Теорема полностью доказана.

Замечание. Перепишем формулы для условных вероятностей $\mathsf{P}(B\,|\,A)$ и $\mathsf{P}(A\,|\,B)$ в виде

$$\mathsf{P}(AB)=\mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B\,|\,A)$$

$$\mathsf{P}(AB)=\mathsf{P}(A\,|\,B)\mathsf{P}(B).$$

Каждое из этих равенств часто называют *«теоремой умножения»* вероятностей, а равенство $\mathsf{P}(AB)=\mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B)$, служащее определением независимости, – *«теоремой умножения»* для независимых событий.

Определение. *События $A_1,A_2,...,A_n$ называются независимыми в совокупности, если для любого $1\le k\le n$ и любого набора индексов $1\le i_1<i_2<...<i_k\le n$ справедливо равенство*

$$\mathsf{P}\left(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\ldots\cap A_{i_k}\right)=\mathsf{P}\left(A_{i_1}\right)\mathsf{P}\left(A_{i_2}\right)\ldots\mathsf{P}\left(A_{i_k}\right)$$

З а м е ч а н и е. Если события независимы в совокупности, то они *попарно независимы*, т. е. из набора $A_1, A_2, ..., A_n$ будут независимы любые два. Чтобы убедиться в этом, достаточно положить в последнем равенстве $k=2$. В то же время, попарная независимость, не влечет за собой независимость в совокупности.

П р и м е р 2.10. Рассмотрим пример, принадлежащий С.Н. Бернштейну (Сергей Натанович Бернштейн – советский математик, 1880-1968). Пусть на плоскость бросают правильный однородный тетраэдр, у которого одна грань окрашена в синий цвет, другая – в красный, третья – в зеленый и , наконец, окраска четвертой грани содержит все три цвета. Введем события

$A=\{$грань, на которую падает тетраэдр, содержит в окраске синий цвет$\}$;

$B=\{$грань, на которую падает тетраэдр, содержит в окраске красный цвет$\}$;

$C=\{$грань, на которую падает тетраэдр, содержит в окраске зеленый цвет$\}$.

Поскольку каждый цвет присутствует на двух гранях, а всего граней четыре, вероятности событий A, B и C одинаковы и равны

$$\mathsf{P}(A)=\mathsf{P}(B)=\mathsf{P}(C)=\frac{1}{2}.$$

Событиям AB, BC и AC соответствует только одна грань, трехцветная, поэтому

$$\mathsf{P}(AB)=\mathsf{P}(BC)=\mathsf{P}(AC)=\frac{1}{4}.$$

Следовательно,

$$\mathsf{P}(AB)=\mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B), \mathsf{P}(BC)=\mathsf{P}(B)\mathsf{P}(C), \mathsf{P}(AC)=\mathsf{P}(A)\mathsf{P}(C),$$

поэтому события A, B и C попарно независимы. В то же время,

$$\mathsf{P}(ABC)=\frac{1}{4}\neq\frac{1}{8}=\mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B)\mathsf{P}(C),$$

так что эти события не являются независимыми в совокупности.

§ 6. Формула полной вероятности

О п р е д е л е н и е. *Говорят, что события $H_1, H_2, ..., H_n$ образуют полную группу, если они попарно несовместны и в сумме дают достоверное событие.*

В приложениях теории вероятностей события полной группы часто имеют характер предположений. Например, если из одной из двух одинаковых с виду урн с шарами наудачу извлекают шар, то события

H_1={шар извлечен из первой урны} и H_2={шар извлечен из второй урны} образуют полную группу. В связи с этим события из полной группы часто называют гипотезами.

Теорема (формула полной вероятности). *Пусть события* $H_1, H_2, ..., H_n$ *такие, что* $\mathsf{P}(H_i) > 0$, *образуют полную группу. Тогда вероятность любого события A равна сумме парных произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующие им условные вероятности наступления события A.*

$$\mathsf{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}(H_i)\mathsf{P}(A \mid H_i)$$

Доказательство. Так как события $H_1, H_2, ..., H_n$ образуют полную группу, можно записать

$$A = A\Omega = A(H_1 + H_2 + ... + H_n) = AH_1 + AH_2 + ... + AH_n = \sum_{i=1}^{n} AH_i \, .$$

В силу несовместности событий $H_1, H_2, ..., H_n$, события AH_i также несовместны, поэтому из аддитивности вероятностной меры следует, что:

$$\mathsf{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}(AH_i)$$

Поскольку при этом $\mathsf{P}(AH_i) = \mathsf{P}(H_i)\mathsf{P}(A \mid H_i)$, окончательно получаем:

$$\mathsf{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}(H_i)\mathsf{P}(A \mid H_i),$$

что и требовалось.

Пример 2.11. Разыгрывается простейшая лотерея среди n лиц по следующей схеме. В ящике находятся n билетов, среди которых $l \le n$ выигрышных. Розыгрыш происходит путем извлечения наугад каждым играющим одного билета. Равны ли шансы выиграть для всех участников? Каким по счету выгоднее тянуть билет для данного игрока?

Решение. Пусть A_k={выигрышный билет попался после k извлечений. Тогда возможны $k+1$ гипотезы $H_{k,r}$={среди k извлеченных билетов ровно s выигрышных, $r = 0,1,...,k$ }. По формуле (2.2)

$$\mathsf{P}(H_{k,r}) = \frac{C_l^r C_{n-l}^{k-r}}{C_n^k}, \quad r = 0,1,...,k, \quad r \le l \, .$$

Поскольку остается $n-k$ среди которых $m-s$ выигрышных, имеем

$$\mathsf{P}(A_k \mid H_{k,r}) = \frac{l-r}{n-k}.$$

По формуле полной вероятности

$$\mathsf{P}(A_k) = \sum_{r=0}^{k} \frac{C_l^r C_{n-l}^{k-r}}{C_n^k} \frac{l-r}{n-k} = \frac{l}{n} \sum_{r=0}^{k} \frac{C_{l-1}^r C_{n-l}^{k-r}}{C_{n-1}^k}, \; s \le l \, .$$

В силу известного тождества для биномиальных коэффициентов

$$\sum_{r=0}^{k} C_{l-1}^{r} C_{n-l}^{k-r} = C_{n-1}^{k}$$

находим, что искомая вероятность $\mathsf{P}(A_k) = \dfrac{l}{n}$ для любого k. Мы получили, что вероятность выигрыша одинакова у всех участников и очередность, согласно которой извлекаются билеты, безразлична.

§ 7. Последовательности независимых испытаний. Схема Бернулли

Пусть проводится серия из n однотипных независимых испытаний. Независимость понимается в том смысле, что на результаты любого из испытаний не влияет исход любого другого испытания. Пусть, далее, в ходе каждого испытания может наступить событие A с известной вероятностью $P(A) = p > 0$, которое мы для краткости будем условно называть «успехом». Противоположное ему событие $\overline{A}$ назовем «неудачей». Его вероятность равна $P(\overline{A}) = 1 - p = q$. Описанный тип случайного эксперимента принято называть «схемой Бернулли» в честь выдающегося швейцарского математика Якоба Бернулли (1654-1705).

Рассмотрим задачу: в условиях схемы Бернулли найти вероятность $P_n(k)$ события $A_{n,k}$, состоящего в том, что в серии из n испытаний «успех» наступил ровно k раз. Элементарными событиями в данном случае будут исходы серий из n испытаний вида

$$\omega_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} = A_{\alpha_1}^{(1)} A_{\alpha_2}^{(2)} \ldots A_{\alpha_n}^{(n)},$$

где на i-ом месте ($i = 1,2,\ldots,n$) расположен значок A, если индекс $\alpha_i = 1$ и значок $\overline{A}$, если $\alpha_i = 0$. При этом символ A встречается ровно k раз, а символ $\overline{A}$ – ровно $n-k$ раз, т. е. среди индексов α_i имеется k единиц и $(n-k)$ нулей. Вероятность каждого события $\omega_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}$ в силу независимости отдельных испытаний естественно положить равной произведению соответствующих вероятностей

$$P(\omega_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}) = p^k (1-p)^{n-k} = p^k q^{n-k}. \tag{2.6}$$

Число элементарных событий, благоприятствующих интересующему нас событию $A_{n,k}$ равно числу способов, которыми можно выбрать k объектов среди имеющихся n объектов, т. е. числу сочетаний

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Таким образом, искомая вероятность равна

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k},\ k = 0,1,\ldots,n. \qquad (2.7)$$

Полученная формула называется *формулой Бернулли*. Говорят также, что формула (2.7) задает биномиальное распределение вероятностей. Это название связано с тем, что правая часть этой формулы представляет собой $(k+1)$-й член бинома Ньютона

$$(p+q)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Отметим также, что сумма всех вероятностей, заданных формулой (2.7) равна единице:

$$1 = (p+q)^n = \sum_{k=0}^{n} P_n(k). \qquad (2.8)$$

Это равенство соответствует тому факту, что события $\{A_{n,k}\}_{k=0}^{n}$ образуют полную группу, т. е. они попарно несовместны и в сумме дают достоверное событие $\sum_{k=0}^{n} A_{n,k} = \Omega$.

Найдем теперь вероятность $P_n(m_1;m_2)$ того, что «успех» в n испытаниях наступил не менее, чем m_1 раз, но не более, чем m_2 раз. Интересующее нас событие есть сумма попарно несовместных событий $A_{n,k}$, $m_1 \le k \le m_2$, значит по аксиоме сложения вероятностей $P_n(m_1;m_2) = \sum_{k=m_1}^{m_2} P(A_{n,k})$, так что

$$P_n(m_1;m_2) = \sum_{k=m_1}^{m_2} P(k), \qquad (2.9)$$

где $P_n(k)$ определяются формулами (2.7).

Замечание Важно понимать, что вероятности элементарных событий $\omega_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}$ были нами не вычислены, а взяты «равными по определению» значениям $p^k q^{n-k}$. При этом оказывается, что соотношения (2.6) действительно задают вероятностную меру на конечном вероятностном пространстве $\Omega = \{\omega_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}\}$, поскольку в силу (2.8)

$$\sum P(\omega_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}) = \sum_{k=0}^{n} P(A_{n,k}) = \sum_{k=0}^{n} P_n(k) = 1,$$

т.е. сумма вероятностей всех элементарных событий равна 1.

Строгое обоснование равенства (2.6) связано с так называемыми прямыми произведениями вероятностных пространств (см., например, [9]) и здесь рассматриваться не будет.

Пример. Найти вероятность того что, при десятикратном подбрасывании «правильной» (т. е. симметричной и однородной) монеты «орел» выпадет ровно 7 раз.

Решение. Для правильной монеты вероятность выпадения «орла» равна 1/2, поэтому в силу формулы Бернулли (2.7) будем иметь

$$P_{10}(7) = C_{10}^{7}\left(\frac{1}{2}\right)^{7}\left(\frac{1}{2}\right)^{10-7} = \frac{10!}{7!3!}\cdot\frac{1}{2^{10}} \approx 0{,}1172.$$

П р и м е р. Правильная монета подбрасывается 10 раз. Найти вероятность того, что герб выпадет не менее 5, но не более 7 раз.

Р е ш е н и е. Воспользуемся формулами (2.9) и (2.7). Имеем

$$P_{10}(5) = C_{10}^{5}\left(\frac{1}{2}\right)^{5}\left(\frac{1}{2}\right)^{10-5} = \frac{10!}{5!5!}\cdot\frac{1}{2^{10}} \approx 0{,}246,$$

$$P_{10}(6) = C_{10}^{6}\left(\frac{1}{2}\right)^{6}\left(\frac{1}{2}\right)^{10-6} = \frac{10!}{6!4!}\cdot\frac{1}{2^{10}} \approx 0{,}205,$$

$$P_{10}(7) = C_{10}^{7}\left(\frac{1}{2}\right)^{7}\left(\frac{1}{2}\right)^{10-7} = \frac{10!}{7!3!}\cdot\frac{1}{2^{10}} \approx 0{,}117,$$

$$P_{10}(5;7) = P_{10}(5) + P_{10}(6) + P_{10}(7) \approx 0{,}246 + 0{,}205 + 0{,}117 = 0{,}568.$$

Задания для самостоятельной работы студентов

2.1. Из полного набора домино (28 штук) наудачу выбирают 7 костей. Какова вероятность, что среди них окажется по крайней мере одна кость с шестью очками?[8]

Ответ: $1 - C_{21}^{7} / C_{28}^{7} \approx 0{,}932$

2.2. Из десяти первых букв русского алфавита наудачу составляется новый алфавит, состоящий из пяти букв. Найти вероятности следующих событий: A = {в состав нового алфавита входит буква а}, B = {в состав нового алфавита входят только согласные буквы}.[8]

Ответ: $\mathsf{P}(A) = 1/2; \mathsf{P}(B) = 1/42$

2.3. Среди кандидатов в студенческий совет факультета 3 первокурсника, 5 второкурсников и 7 третьекурсников. Из этого состава наудачу выбирают пять человек на предстоящую конференцию. Найти вероятности следующих событий: А = {будут выбраны одни третьекурсники}, В = {все первокурсники попадут на конференцию}, С = {не будет выбрано ни одного второкурсника}.[8]

Ответ: $\mathsf{P}(A) = 1/143;\ \mathsf{P}(B) = 1/91;\ \mathsf{P}(C) = 1/143$

2.4. Из урны, содержащей m_1+m_2 шаров, из которых m_1 белых и m_2 черных, наудачу отбирают m шаров ($m \le \min(m_1;m_2)$) и откладывают в сторону. Найти вероятности следующих событий: A = {все отложенные шары белые}, B = {среди отложенных шаров ровно κ белых; $k \le m$}.[8]

Ответ: $\mathsf{P}(A)=\dfrac{C_{m_1}^m}{C_{m_1+m_2}^m}$; $\mathsf{P}(B)=\dfrac{C_{m_1}^k C_{m_2}^{m-k}}{C_{m_1+m_2}^m}$

Числа 1,2,...,9 записываются в случайном порядке. В задачах 2.5-2.7 найти вероятности указанных событий.

2.5. A = {числа будут записаны в порядке возрастания}.[8]

Ответ: $1/9!$

2.6. B = {числа 1 и 2 будут стоять рядом и в порядке возрастания}, C = {числа 3, 6 и 9 будут стоять рядом}.[8]

Ответ: $\mathsf{P}(B)=1/9$; $\mathsf{P}(C)=1/12$

2.7. D = {на четных местах будут стоять четные числа}, E = {сумма каждых двух чисел, стоящих на одинаковом расстоянии от концов, равна 10}.[8]

Ответ: $\mathsf{P}(D)=1/126$; $\mathsf{P}(E)=1/945$

2.8. Группа, состоящая из 8 человек, занимает места за круглым столом в случайном порядке. Какова вероятность того, что при этом два определенных лица окажутся сидящими рядом[8]

Ответ: 2/7

2.9. В технической библиотеке имеются книги по математике, физике, химии и т.д.; всего по 16 разделам науки. Поступили очередные четыре заказа на литературу. Считая, что любой состав заказанной литературы равновозможен, найти вероятности следующих событий: A={заказаны книги из различных разделов науки}, B={заказаны книги из одного и того же раздела науки}.[8]

Ответ: 0,74; 0,004

2.10. В кондитерской имеется 7 видов пирожных. Очередной покупатель выбил чек на 4 пирожных. Считая, что любой заказываемый набор пирожных равновероятен, вычислить вероятность того, что покупатель заказал: а) пирожные одного вида; б) пирожные разных видов; в) по два пирожных различных видов. [8]

Ответ: а) 1/30; б) 1/6; в) 1/10

2.11. Бросается 10 одинаковых игральных костей. Вычислить вероятности следующих событий: A = {ни на ОДНОЙ кости не выпадет 6 очков}, B = {хотя бы на ОДНОЙ кости выпадет 6 очков}, C = {ровно на 3 костях выпадет 6 очков}. [8]

Ответ: $\mathsf{P}(A)=(5/6)^{10}\approx 0{,}1615$;$\mathsf{P}(B)\approx 0{,}8385$; $\mathsf{P}(C)\approx 0{,}155$

2.12. Опыт состоит в четырехкратном выборе с возвращением одной из букв алфавита E={ а, б, к, о, м} и выкладывании слова в порядке поступления букв. Какова вероятность того, что в результате будет выложено слово мама? [8]

Ответ: 0,0016

2.13. В подъезде дома установлен замок с кодом. Дверь автоматически отпирается, если в определенной последовательности набрать три цифры из имеющихся десяти. Некто вошел в подъезд и, не зная кода, стал наудачу пробовать различные комбинации из трех цифр. На каждую попытку он тратит 20 секунд. Какова вероятность события A = {вошедшему удастся открыть дверь за один час}? [8]

Ответ: 1/4

3. КОМБИНАТОРНЫЙ АНАЛИЗ В МОДЕЛЯХ СЛУЧАЙНЫХ ГРАФОВ

§ 1. Начальные понятия теории графов

1.1. Определение графа

Граф G – это совокупность двух конечных множеств $G=\{V,E\}$. Здесь множество V не может быть пустым, а множество E состоит из неупорядоченных пар элементов множества V. Элементы множества V называются *вершинами* графа G, элементы множества E – *ребрами*. Такой граф G называют еще *неориентированным графом*. Для графа с m вершинами и n ребрами используется название (m,n)-*граф*.

Вершины графа v_i и v_j называются *смежными*, если $e=\{v_i,v_j\}\in E$. Ребро e в этом случае называется *инцидентным* вершинам v_i и v_j.

Наглядным представлением графа является диаграмма, на которой вершины графа изображаются произвольно расположенными на плоскости точками. Ребра графа изображаются линиями, которые соединяют между собой точки, соответствующие смежным вершинам. Один и тот же граф может быть представлен разными диаграммами.

Пример 3.1. Пусть $G=\{V,E\}$ где $V=\{v_1,\ldots,v_6\}$ и $E=\{ \{v_1,v_2\},\{v_1,v_4\},\{v_1,v_6\},\{v_2,v_3\},\{v_2,v_4\},\{v_2,v_6\},\{v_4,v_6\},\{v_5,v_6\} \}$. На рис.6 представлены две из возможных диаграмм данного графа.

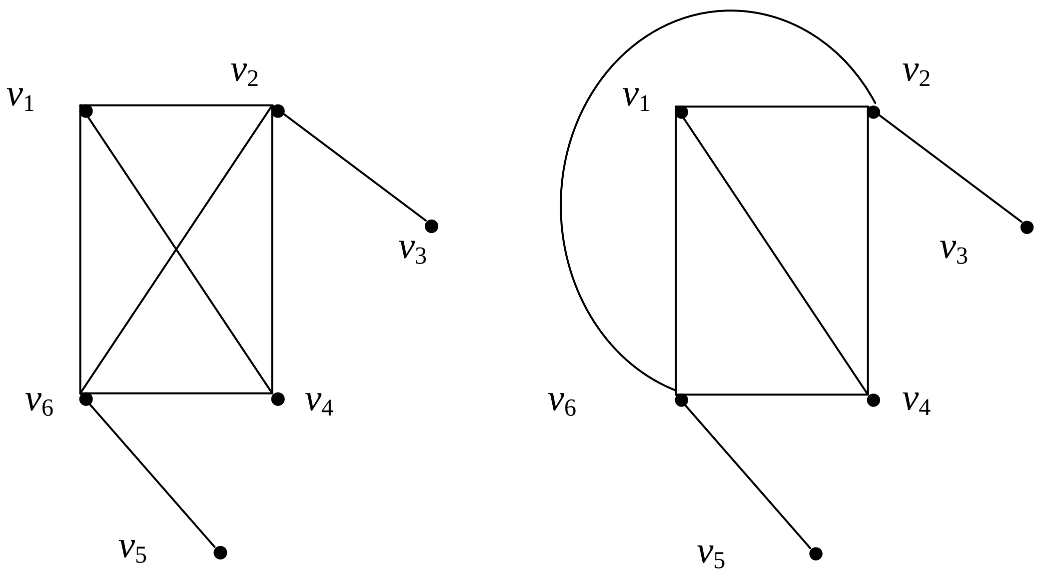

Рис.6.

Пусть теперь даны графы $G=\{V_G,E_G\}$ и $H=\{V_H,E_H\}$. Графы G и H называются *изоморфными*, если между множествами V_G и V_H существует взаимно однозначное соответствие, сохраняющее смежность вершин. Изоморфные графы можно изобразить диаграммами с одинаковым расположением точек и линий. Различие между диаграммами будет определяться разной нумерацией вершин.

1.2. Маршрут на графе. Связность графа. Компоненты графа

Рассмотрим граф $G=\{V_G,E_G\}$. *Маршрут*, соединяющий на графе G вершины v_0 и v_k – это последовательность вершин и ребер $v_0,e_1,v_1,\ldots,v_{k-1},e_k,v_k$, в которой $e_i=\{v_{i-1},v_i\}$ для $i=1, \ldots,k$. При отсутствии в графе кратных (повторяющихся) ребер можно указывать только последовательность вершин $v_0v_1v_2\ldots v_k$. Если $v_0=v_k$, то маршрут называют *замкнутым*. Маршрут, в котором каждое ребро проходится только один, называется *цепью*. Если в цепи нет повторяющихся вершин, то такая цепь называется простой. Замкнутая цепь называется *циклом*, простая замкнутая цепь – *простым циклом*.

Для иллюстрации данных определений рассмотрим граф $G=\{V_G,E_G\}$ на рис.7. При этом следует помнить, что на диаграмме вершинам соответствуют только те точки, которые специально помечены. Так что в нашем случае $V_G =\{v_1,v_2,\ldots,v_8\}$

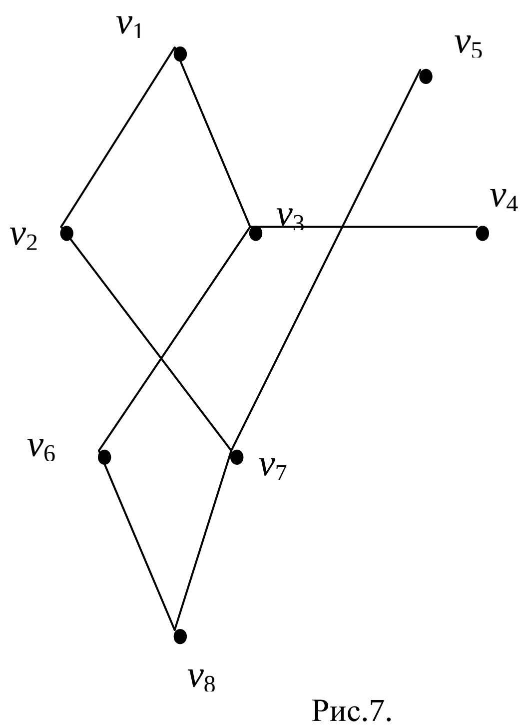

Рис.7.

Тогда:

1) последовательность вершин $v_1v_3v_6v_8v_7v_2v_1v_3v_4$ определяет один из возможных маршрутов на данном графе;

2) примером замкнутого маршрута является $v_1v_3v_6v_8v_7v_5v_7v_2v_1$;

3) $v_1v_3v_4$ – простая цепь; эту цепь можно получить из построенного в пункте 1 маршрута $v_1v_3\underline{\underline{v_6v_8v_7v_2v_1v_3}}v_4$; для этого достаточно удалить вершины, отмеченные подчеркиванием, а также расположенные между ними ребра;

4) действуя аналогично, из замкнутого маршрута, построенного в пункте 2, можно выделить простой цикл $v_1v_3v_6v_8v_7v_2v_1$.

Перейдем теперь к обсуждению одного из наиболее важных понятий теории графов: будем называть граф *связным*, если любые две его несовпадающие вершины можно соединить маршрутом (простой цепью).

Граф на рис.7 является связным. Далее на рис.8 представлена диаграмма несвязного графа.

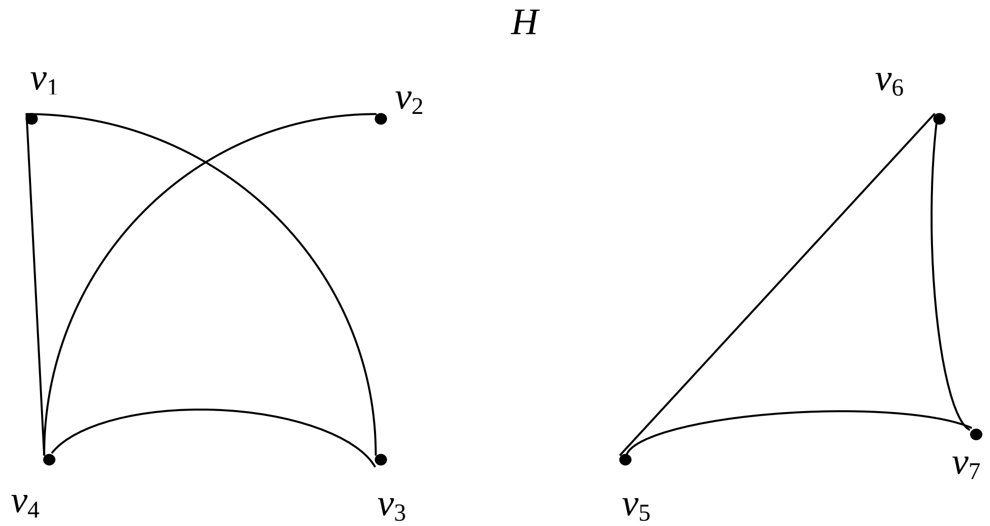

Рис.8.

В этом месте изложения материала полезно задуматься о том, какие реальные объекты или процессы можно моделировать с помощью графов. Математические модели, использующие теорию графов, получили наибольшее распространение в тех прикладных областях, где важно учитывать связи и взаимодействие между объектами или событиями. Классическими примерами являются транспортные сети, в которых некоторые пункты (узлы) соединены коммуникациями. Это могут быть:

– сеть автомобильных и железных дорог, соединяющих населенные пункты;

– магистральные трубопроводы и линии передачи энергии между производителями ресурса, пунктами распределения и потребителями;
– маршруты авиаперевозок между аэродромами;
– информационные сети, в которых серверы соединяются линиями связи для передачи информации.

Как видно из приведенных примеров, для успешного решения прикладных задач чрезвычайно важно, чтобы сеть обеспечивала коммуникацию между всеми пунктами. При построении математической модели узды сети моделируются с помощью вершин графа, а связи между узлами – с помощью ребер. При этом связность графа в математической модели соответствует способности сети работать как единое целое.

Теория графов позволяет исследовать устойчивость сетей к потере работоспособности некоторых элементов. Выход из строя линии коммуникации моделируется удалением из графа ребра. потеря работоспособности некоторого узла сети описывается как удаление соответствующей вершины и всех ребер, которые это вершине инцидентны.

Вернемся к рассмотрению несвязного графа $H=\{V,E\}$ на рис.8. Если ограничится множеством вершин $V_1=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ и множеством ребер $E_1=\{ \{v_1,v_3\},\{v_1,v_4\},\{v_2,v_4\},\{v_3,v_4\} \}$, инцидентных только вершинам из V_1, то граф $C_1=\{V_1,E_1\}$ получается связным. Аналогично можно определить связный граф $C_2=\{V_2,E_2\}$, где $V_2=\{v_5,v_6,v_7\}$, $E_1=\{ \{v_5,v_6\},\{v_5,v_7\},\{v_6,v_7\} \}$. В силу того, что $V_1 \subseteq V,\ E_1 \subseteq E$ граф C_1 называют *подграфом* графа H. Граф C_2 также является подграфом для G.

Заметим следующее. Если добавить к графу C_1 либо C_2 новую вершину или ребро из имеющихся в графе H, получается несвязный граф. То есть C_1 и C_2 являются максимальными относительного такого действия. Максимальный связный подграф называют *компонентой* данного графа. Связный граф является для самого себя единственной компонентой.

Если в результате удаления каких-либо вершин или ребер связного графа число компонент увеличивается, это означает, что связность нарушена. Вершины и ребра, удаление которых приводит к увеличению числа компонент, играют критическую роль в обеспечении работы сети как единого целого.

Для обозначения таких элементов введены специальные термины. *Точка сочленения* – это вершина, удаление которой вместе с инцидентными ей ребрами увеличивает число компонент. *Мост* – это ребро, удаление которого увеличивает число компонент, даже если при этом инцидентные мосту вершины остаются в графе.

На рис.9 приведен граф, содержащий мост $e=\{v_3,v_5\}$.

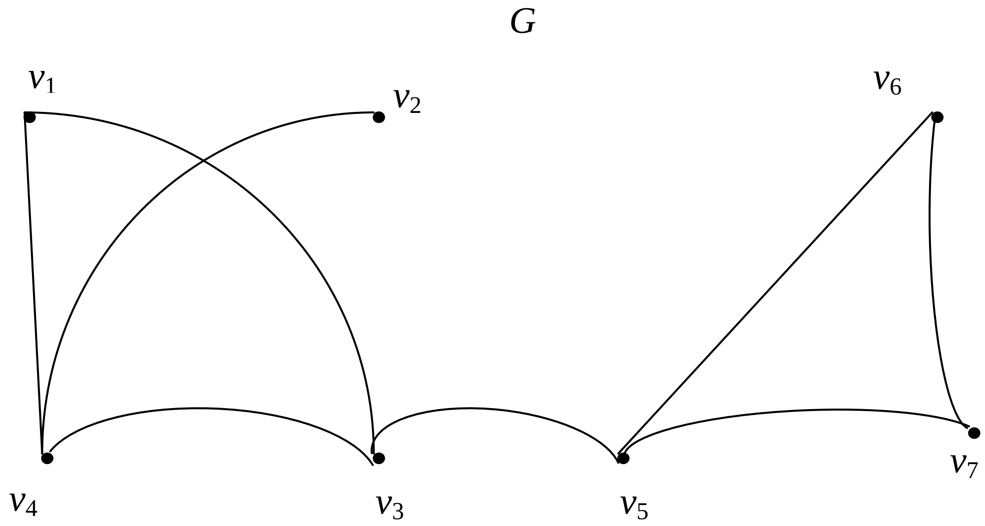

Рис.9.

После удаления ребра e связность графа теряется и возникает граф $H=G\text{-}e$, который представлен выше на рис.8. Как уже отмечалось, этот граф содержит две компоненты.

Диаграмма графа, приведенная на рис.9, позволяет также проиллюстрировать понятие точки сочленения. Очевидно, что такой точкой является каждая вершина, инцидентная мосту. Однако этим понятие о точке сочленения не исчерпывается. Так, удаление в графе G вершины v_4 приводит к удалению всех инцидентных ей ребер. При этом остальные вершины остаются в графе. В число оставшихся входит вершина v_2, которая стала теперь изолированной, то есть не имеет инцидентных ребер (рис.10).

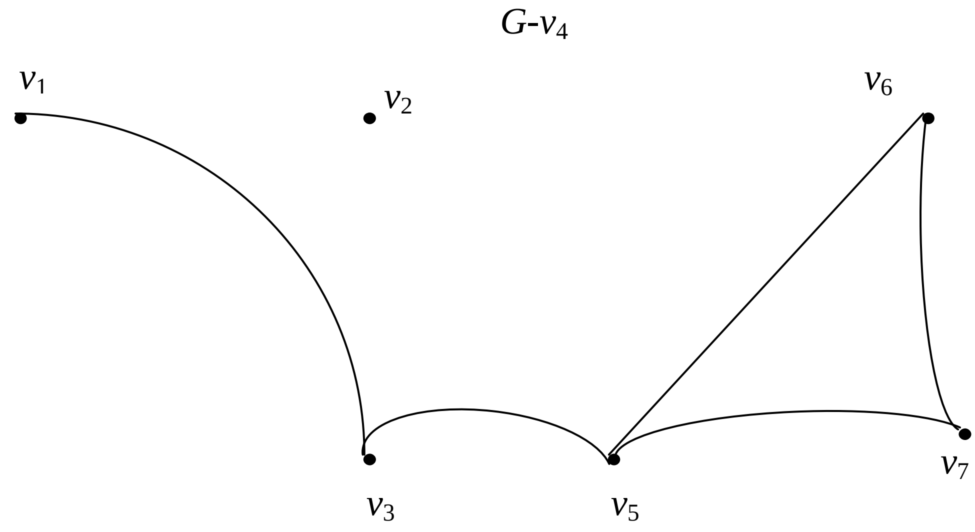

Рис.10.

Изолированная вершина является отдельной компонентой. Таким образом, граф G-v_4 на рис.10 содержит две компоненты и не является связным.

Анализ числа компонент можно выполнить, не пользуясь диаграммой графа. Для этого граф следует задать с помощью *матрицы Кирхгофа*. Для графа $G=\{V,E\}$ с m вершинами матрица Кирхгофа представляет собой квадратную матрицу $\boldsymbol{B}(G)=[b_{ij}]$ порядка m. Элементы матрицы определяются по следующему правилу

$$b_{ij} = \begin{cases} -1, & \text{если} \quad i \neq j \quad \text{и} \quad \{v_i, v_j\} \in E, \\ 0, & \text{если} \quad i \neq j \quad \text{и} \quad \{v_i, v_j\} \notin E, \\ \deg(v_i), & \text{если} \quad i = j. \end{cases}$$

Через $\deg(v_i)$ обозначена *степень вершины* – число ребер, инцидентных данной вершине. Можно показать, что число компонент $k(G)$ данного графа определяется выражением

$$k(G)=m-\operatorname{rank}\mathbf{B}(G). \qquad (3.1)$$

Здесь $\operatorname{rank}\mathbf{B}(G)$ – ранг матрицы Кирхгофа.

Пример.3.1. Граф G задан матрицей Кирхгофа

$$\mathbf{B}(H) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Требуется:

1) определить число компонент $k(H)$ данного графа;

2) в случае, если данный граф несвязный, установить принадлежность каждой вершины той или иной компоненте.

Решение.

1) Число компонент данного графа можно определить с помощью формулы (3.1). Порядок матрицы Кирхгофа $\mathbf{B}(H)$ равен семи. Это означает, что рассматривается граф, у которого семь вершин, то есть m=7. Остается вычислить ранг матрицы Кирхгофа. Для вычисления ранга матрицы наибольшее распространение получили метод Гаусса (метод элементарных преобразований), а также метод окаймляющих миноров. Заметим, что в настоящее время доступны программы, локально устанавливаемые на компьютер, и онлайн сервисы, реализующие указанные методы. В

результате можно получить rank$\mathbf{B}(H)$=5. Тогда формула (3.1) позволяет вычислить $k(H)$=7-5=2. Таким образом, данный граф H не является связным и содержит две компоненты. Это делает содержательным задание из пункта 2.

2) Разбирая решение для пункта 2, уделим больше внимания технике вычислений. Полезно заметить, что матрица Кирхгофа $\mathbf{B}(H)$ данного графа имеет блочно-диагональную структуру. В матрице можно выделить прямоугольные области, в которых все элементы равны нулю. Довольно часто это подчеркивается специальной системой обозначений. Например, в нашем случае

$$\mathbf{B}(H)=\begin{bmatrix} \begin{matrix} 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{matrix} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \begin{matrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{matrix} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_2 \end{bmatrix}. \qquad (3.2)$$

Напомним, что номера строк и столбцов соответствуют номерам вершин. Представление матрицы Кирхгофа (3.2) показывает, что в данном графе ни одна из вершин v_1,v_2,v_3,v_4 не является смежной с вершинами v_5,v_6,v_7.

С учетом результата пункта 1 можно утверждать, что множество $V_1=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ есть множество вершин первой компоненты, а множество $V_2=\{v_5,v_6,v_7\}$ – это множество вершин второй компоненты.

Данный результат можно получить непосредственно, подсчитывая ранги для блоков матрицы $\mathbf{B}(H)$. Рассмотрим блок $\mathbf{B_1}$ как матрицу Кирхгофа для подграфа C_1, который порожден множеством вершин V_1. Имеем

$$\mathbf{B}_1=\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix},$$

Определим rank$\mathbf{B_1}$ методом окаймляющих миноров. Рассмотрим угловой минор третьего порядка,

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot 1\cdot 2-(-1)\cdot 1\cdot(-1)=3\neq 0\,.$$

Для этого минора существует единственный окаймляющий минор

$$\det\mathbf{B}_1 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Тем самым установлено, что rank$\mathbf{B}_1$=3. Нами рассматривается множество V_1, содержащее четыре вершины, то есть m=4. Тогда формула (3.1) приводит к результату $k(C_1)$=4-3=1. Последнее означает, что подграф C_1 является связным. Ранее отмечено, что в данном графе нет ребер инцидентных сразу вершинам из V_1 и V_2. Так что C_1 является максимальным связным подграфом, то есть компонентой.

Аналогичное рассуждение можно провести для подграфа C_2, который порожден множеством вершин V_2. Рассмотрим в матрице (3.2) блок

$$\mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

как матрицу Кирхгофа для подграфа C_2 с множеством вершин $V_2=\{v_5,v_6,v_7\}$. Вычисление углового минора второго порядка и окаймляющего минора приводит к величинам

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4-1=3\neq 0$$

и

$$\det\mathbf{B}_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0\,.$$

Тогда $k(C_2)$=3-2=1. Так что C_2 является второй компонентой графа H.

Полученные результаты можно проиллюстрировать с помощью диаграммы графа H. Эту диаграмму мы уже рассматривали на рис.8.

1.3. Полный граф

В дальнейшем нам понадобится понятие полного графа. По определению *полный граф* – это граф, в котором любые две вершины являются смежными. Если полный граф имеет m вершин, то количество его ребер N определяется как число сочетаний без повторений из m элементов по 2, то есть

$$N = C_m^2 = \frac{m!}{2!(m-2)!} = \frac{m(m-1)}{2}. \qquad (3.3)$$

Формула (3.3) показывает, что для полного графа число ребер однозначно определяется числом вершин. Это обстоятельство отражено в традиционном обозначении полного графа с m вершинами через K_m. Как мы видим, обозначение содержит указание только на число вершин.

На рис.11 в качестве примера приведен полный граф K_5

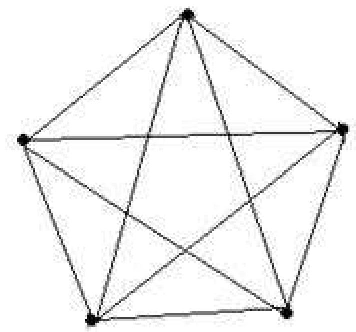

Рис.11.

Полные графы используются для постановки многих задач теории графов. Для нас полный граф будет интересен тем, что он представляет собой реализацию всех возможностей проводить ребра для данного множества вершин. Любой граф с таким же множеством вершин будет теперь рассматриваться как подграф полного графа. Если какое-либо ребро отсутствует в подграфе, можно представить, что это ребро было удалено из полного исходного графа. Однако ситуацию наличия либо отсутствия ребра в подграфе можно также понимать как результат испытания со случайным исходом. При этом считается, что успех испытания приводит к появлению ребра, а неудача – к отсутствию. Если рассуждать в такой манере, полный граф окажется полезен для представления пространства элементарных событий.

Обозначенный нами подход будет развит в следующем параграфе. Это позволит использовать средства комбинаторного анализа и результаты теории вероятностей для построения и исследования моделей случайных графов.

§ 2. Понятие о случайном графе. Модель Эрдёша–Реньи

Рассмотрим конечное множество $V=\{v_1,\ldots,v_m\}$ с данным количеством элементов. Используем формулу (3.3) и определим число N ребер полного графа K_m с множеством вершин V. Ребра полного графа пронумеруем и обозначим как $e_1,\ldots,e_N$. Зафиксируем некоторое значение p из числового интервала (0,1). Теперь можно реализовать *модель Эрдёша–Реньи* для построения случайного графа G с множеством вершин $V=\{v_1,\ldots,v_m\}$ и множеством ребер E. С этой целью рассмотрим последовательность N испытаний по схеме Бернулли с вероятностью успеха p в каждом испытании. Если испытание с порядковым номером $k=1,\ldots,N$ приводит к успеху, то ребро e_k включается во множество E. Если испытание заканчивается неудачей, то соответствующее ребро пропускаем. Указанная процедура приводит к появлению одного из 2^N возможных случайных графов. Каждый такой случайный граф является подграфом полного исходного графа.

Пример.3.2. Построить все возможные случайные графы с тремя вершинами. Оценить вероятность реализации каждого случайного графа, если известно, что ребра включается в случайный граф независимо, с вероятностью p.

В нашем случае $V=\{v_1,v_2,v_3\}$, $E=\{e_1,e_2,e_3\}$. Исходный полный граф K_3 представлен на рис.12.

K_3

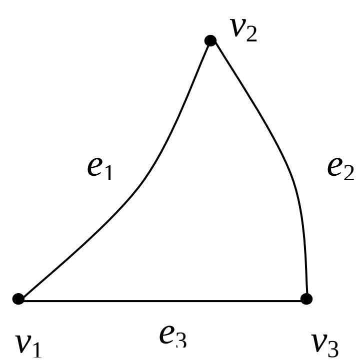

Рис.12.

Заметим, что в нашем примере $N=C_3^2=3(3-1)/2=3$, так что могут возникнуть 2^3=8 случайных графов. Ниже приведены диаграммы для всех возможных случаев

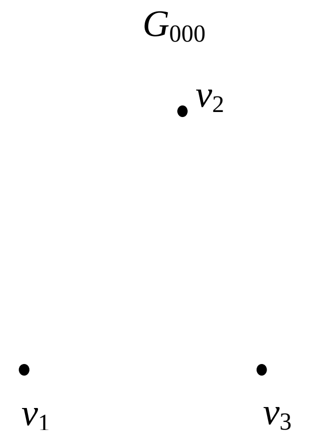

Рис.13. Случайный граф, вероятность реализации которого равна $(1\text{-}p)^3$

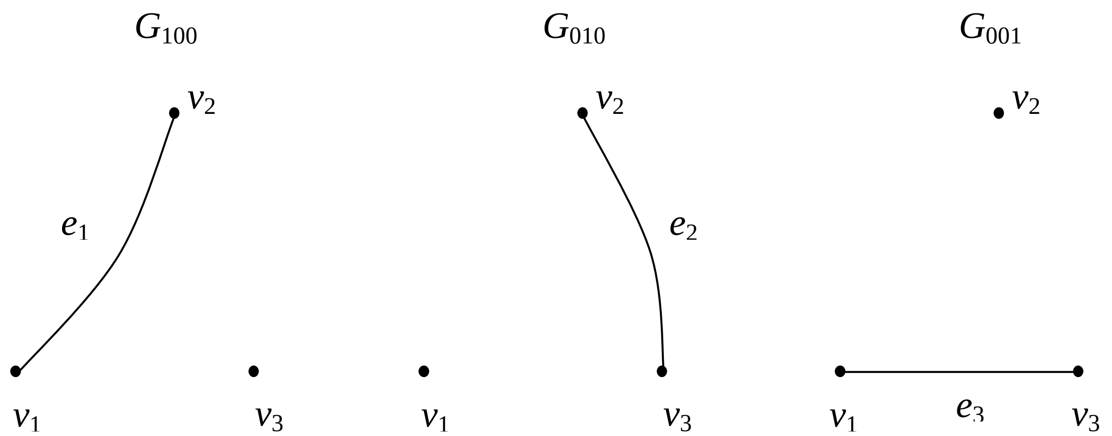

Рис.14. Случайные графы, вероятность реализации которых равна $p(1\text{-}p)^2$

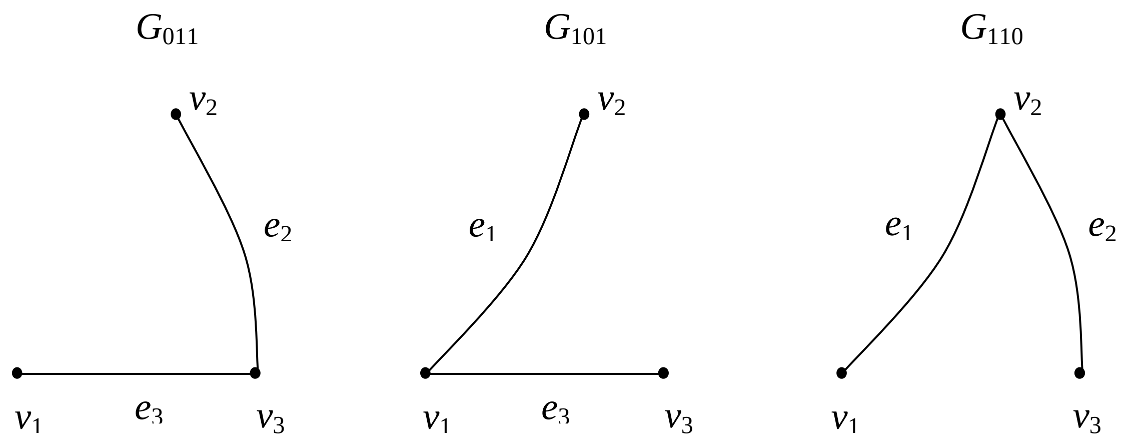

Рис.15. Случайные графы, вероятность реализации которых равна $p^2(1\text{-}p)$

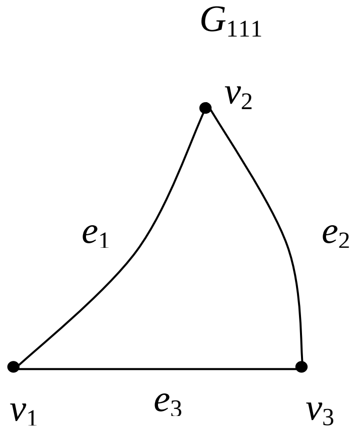

Рис.16. Случайный граф, вероятность реализации которого равна p^3

Завершая разбор примера, поясним смысл индексов в обозначениях случайных графов на рис.13-16. Каждый индекс представляет собой запись результатов в последовательности трех испытаний по схеме Бернулли. Цифра 1 обозначает успех испытания, когда ребро с соответствующим номером включается в случайный граф, цифра 0 обозначает неудачу – соответствующее ребро отсутствует в случайном графе.

§ 3. Связность случайного графа

Будем рассматривать далее возникновение какого-либо случайного графа как элементарное случайное событие. Для случая, рассмотренного в примере 3.2., возникает пространство элементарных событий

$$\Omega = \{G_{000}, G_{001}, G_{010}, G_{011}, G_{100}, G_{101}, G_{110}, G_{111}\}.$$

Теперь у нас появилась возможность обсуждать различные события, связанные с реализацией случайных графов. Как отмечалось выше, важнейшим свойством графа является его связность. Введем в рассмотрение случайное событие

$$G_{\text{connected}}=\{\text{случайный граф является связным}\}.$$

Для примера 3.2. получаем

$$G_{\text{connected}} = \{G_{011}, G_{101}, G_{110}, G_{111}\}.$$

Тогда

$$\mathrm{P}(G_{\text{connected}}) = \mathrm{P}(G_{011}) + \mathrm{P}(G_{101}) + \mathrm{P}(G_{110}) + \mathrm{P}(G_{111}) =$$
$$= 3p^2(1-p) + p^3 = 3p^2 - 2p^3.$$

Заметим, что мы без особого труда получили искомый результат, но рассматривали при этом задачу очень маленькой размерности с фиксированной вероятностью успеха p.

Наши оценки вероятности возникновения связного графа будут представлять практический интерес, если учесть некоторые дополнительные обстоятельства. Допустим, что какое-либо полезное свойство объекта (в нашем случае связность для сети, смоделированной случайным графом) возникает как случайное событие. Тогда на практике следует обеспечить условия, при которых вероятность такого случайного события получается весьма высокой. Моделирование реальных объектов приводит к задачам большой, а зачастую очень большой размерности. Так что надо быть готовым к тому, что число вершин m будет велико. Рост числа вершин означает, что моделируемый объект становится все более сложным. При этом может уменьшаться вероятность p включения ребра в случайный граф. С учетом изложенного, важным представляется следующий результат.

Теорема (надежность сети). *Пусть* $p = c\dfrac{\ln m}{m}$. *Если* $c \geq 3$ *и* $m \geq 100$, *то* $\mathrm{P}(G_{\text{connected}}) > 1 - \dfrac{1}{m}$.

Один из вариантов доказательства данной теоремы рассмотрен в [11].

Следуя далее работе [11], введем понятие о случайном событии, которое выполнено почти наверное. Рассмотрим в вероятностном пространстве случайных графов последовательность свойств-событий (A_m). Будем говорить, что событие A_m *выполнено почти наверное*, если

$$\mathrm{P}(A_m) \to 1 \text{ при } m \to \infty.$$

Теперь определим для значений m=3,4,5,… содержание случайных событий A_m={случайный граф с m вершинами связный}. Мы можем обобщить оценку надежности сети. Новая оценка имеет следующий вид.

Теорема. *Пусть* $p = c\dfrac{\ln m}{m}$. *Если* $c > 1$, *то почти наверное случайный граф связен. Если* $c < 1$, *то почти наверное случайный граф связным не является.*

В заключение параграфа приведем еще один важный результат.

Теорема. *Пусть* $p=c/m$. *Тогда при любом* $c<1$ *существует такая константа* $\beta=\beta(c) > 0$, *что почти наверное каждая компонента случайного графа имеет не более* $\beta\cdot\ln m$ *вершин. При любом* $c>1$ *существует такая константа* $\gamma=\gamma(c)\in(0,1)$, *что почти наверное среди компонент случайного графа есть одна, число вершин которой не меньше* γm.

Для приложений данный результат означает, что при достаточно малой вероятности p включения ребер в случайный граф компоненты этого графа будут весьма малы. При большой вероятности p случайный граф будет содержать одну «гигантскую» компоненту, остальные компоненты будут малы.

Литература

1. Алфутова Н.Б. Алгебра и теория чисел. Сборник задач для математических школ / Н.Б.Алфутова, А.В.Устинов. М.: МЦНМО, 2002.264 с.
2. Андерсон Дж. А. Дискретная математика и комбинаторика / Джеймс А. Андерсон. М.: Издательский дом "Вильямс", 2004. 960 с.
3. Ежов И.И. Элементы комбинаторики / И.И.Ежов, А.В.Скороход, М.И.Ядренко. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1977. 80 с.
4. Комбинаторный анализ. Задачи и упражнения: Учеб. пособие / Под ред. К.А.Рыбникова. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1982. 368 с.
5. Серебряков А.В. Элементарный курс математической логики: Учеб. пособие / А.В.Серебряков. Саратов: Сарат. гос. техн. ун-т, 2011. 32 с.
6. Тишин В.В. Дискретная математика в примерах и задачах. / В.В.Тишин. СПб.: БХВ-Петербург, 2008. 352 с.
7. Новиков В.В. Основы теории вероятностей: учебное пособие / Новиков В.В. – Энгельс: Изд-во ЭТИ (филиал) СГТУ имени Гагарина Ю.А., 2016. 59 с.
8. Сборник задач по теории вероятностей, и математической статистике и теории случайных функций: Учебное пособие / Под общей ред. А.А.Свешникова. – СПб.: Издательство «Лань», 2013. 448 с.
9. Сборник задач по математике для втузов. В 4 частях. Ч.4: Учебное пособие для втузов / Под общей ред. А.В.Ефимова и А.С.Поспелова. – М.: Издательство Физико-математической литературы, 2003. 432 с.
10. Ширяев А.Н. Вероятность. / В 2-х книгах. М.: Изд-во МЦНМО, 2004. Кн.1. 520 с.
11. Райгородский А.М. Модели случайных графов / А.М.Райгородский. – М.: МЦНМО, 2011. 136 с.

Серебряков Андрей Владимирович
Новиков Владимир Васильевич
Нагар Юлия Николаевна

ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРНОГО АНАЛИЗА В ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МОДЕЛЯХ СЛУЧАЙНЫХ ГРАФОВ

Учебное пособие

Ответственный за выпуск А.В.Серебряков
Оригинал-макет А.В.Серебряков

Подписано в печать 14.05.2019 г.
Формат 60x84 1/16. Бумага офсетная. Гарнитура Times New Roman Печать RISO.
Объем 3,25 печ.л. Тираж 100 экз. Заказ № 306

413100, Россия, Саратовская область, г. Энгельс, пл. Свободы, 17.
ЭТИ (филиал) СГТУ имени Гагарина Ю.А.